Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Тульский государственный университет

Ю.Н.КОЛМАКОВ, Ю.А.ПЕКАР, М.Ю.ПЕКАР

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Задачи и методы их решения

Учебное пособие

Тула 2002

УДК 537(07)

Термодинамика и молекулярная физика. Задачи и методы их решения: Учебное пособие/ Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар, М.Ю.Пекар; Тул. гос. ун-т, Тула, 2002, 139 с.

ISBN 5 - 7679 - 0192 - 9

Подробно рассмотрены методы решения задач по различным темам раздела "Термодинамика и молекулярная физика" курса общей физики. Кроме этого, приведены тексты свыше 260 задач различной степени сложности по этим темам.

Предназначено для проведения семинарских и практических занятий со студентами всех специальностей физического и инженерно-технического профиля. Пособие также может быть использовано студентами в процессе самостоятельной подготовки к этим занятиям и как сборник индивидуальных заданий.

Ил.: 74. Библиогр.: 22 назв.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета Тульского государственного университета.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, проф. Ю.Ф.Головнев, Тул. гос. пед. ун-т. им. Л.Н. Толстого.

ISBN 5 - 7679 - 0192 - 9

$$К\,\frac{1604050000-19}{76П(03)-99}\,60-99$$

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью настоящего пособия является изложение стандартных и специальных методов решения задач по различным темам части курса общей физики "Термодинамика и молекулярная физика".

Главы 1 и 3 содержат объяснение способов решения основных типов задач по термодинамике и молекулярной физике. В них рассмотрены различные методы и специальные приемы использования законов физики для решения подобных задач. Знание этих методов позволяет решить любую из задач, предлагаемых для самостоятельной работы. Необходимый для работы теоретический материал можно найти в литературе, например, [1], [6], [14], [15] и т.д.

Главы 2 и 4 содержит тексты задач, предназначенных для самостоятельной работы студентов. При их подборе были использованы различные пособия, например, [11], [12], [17], [18], [19] и многие другие, причем главными критериями выбора было соответствие содержания задачи иллюстрируемому ею физическому закону и связь условий задачи с возможным практическим применением изучаемых закономерностей. Для удобства использования все тексты задач сгруппированы по различным темам курса; к ним прилагается список тематического содержания, в котором указаны основные законы, используемые при решении задачи, а также обозначена степень ее трудности, отражающая, в первую очередь, объем и уровень сложности применяемого при решении математического аппарата, а также нестандартность подхода при использовании исходных физических законов. Как правило, решение всех предлагаемых задач предусматривает применение методов высшей математики в объеме стандартного вузовского курса.

Глава 1.

Термодинамика

1 Уравнение состояния идеального газа

Газ, подчиняющийся уравнению

$$pV = \nu RT\,, \tag{1.1}$$

где ν – число молей ($\nu = m/\mu$), а $R = 8,314$ Дж/(моль $\cdot$ К) – универсальная газовая постоянная, называется идеальным, а уравнение (1.1) – уравнением состояния идеального газа.

Как следует из молекулярно-кинетической теории, уравнение (1.1) получается в том и только в том случае, когда а) взаимодействием молекул друг с другом можно пренебречь (иначе говоря, молекулы упруго взаимодействуют только со стенкой сосуда); б) объем, занимаемый самими молекулами, ничтожно мал по сравнению с объемом сосуда.

Другая форма уравнения состояния (1.1) имеет вид:

$$\rho = p\mu/RT\,, \tag{1.2}$$

где $\rho = m/V$ — плотность газа , а μ — его молярная масса.

Наконец, уравнение (1.1) можно записать и так:

$$p = nkT\,, \tag{1.3}$$

где n – концентрация молекул, а $k = R/N_{\text{Ав}} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана ($N_{\text{Ав}} = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро).

<u>Задача 1.1</u>

Вертикальный закрытый с обоих торцов цилиндр разделён на две части легкоподвижным поршнем; по обе стороны его находится по одному молю воздуха, который можно считать идеальным газом. В равновесном состоянии при температуре $T_0 = 300$ К объем верхней части цилиндра в $k_1 = 4$ раза больше объема нижней части. При какой температуре отношение этих объемов станет $k_2 = 3$?

Решение

Обозначим через m – массу поршня, а через S - сечение цилиндра. Тогда условие равновесия поршня запишется в виде

$$p_1 + mg/S = p_2\ ,$$

где p_1 и p_2 – давления газа в верхней и нижней частях цилиндра, откуда следует, что при изменении температуры

$$p_2 - p_1 = mg/S = \text{const}$$

или, с учетом уравнения (1.1),

$$T\,(1/V_2 - 1/V_1) = \text{const}\,.$$

Здесь V_1 и V_2 – объёмы газа над и под поршнем соответственно, причём объём всего цилиндра неизменен:

$$V_1 + V_2 = V_1\,(1 + V_2/V_1) = V_1\left(1 + k_2^{-1}\right) = V_{10}\left(1 + k_1^{-1}\right) = V_{10} + V_{20}\,.$$

Поэтому

$$\frac{T}{V_1}\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = \frac{T_0}{V_{10}}\left(\frac{V_{10}}{V_{20}} - 1\right),$$

откуда

$$T = T_0\,\frac{V_1(k_1 - 1)}{V_{10}(k_2 - 1)} = T_0\,\frac{k_2(k_1^2 - 1)}{k_1(k_2^2 - 1)} = 422\ \text{K}\,.$$

Задача 1.2

Поршневым воздушным насосом откачивают сосуд объема V. За один ход поршень насоса отодвигается, захватывая объем газа ΔV. За сколько ходов давление в сосуде уменьшится в η раз ? Процесс считать изотермическим, а газ – идеальным.

Решение

Пусть давление в сосуде после i-го хода поршня будет p_i. При следующем, $(i+1)$–ом ходе поршня газ изотермически расширяется от объема V до объема $V + \Delta V$, в результате чего его давление уменьшается до

$$p_{i+1} = p_i \cdot V/(V + \Delta V) = p_i\,/(1 + \Delta V/V)\,.$$

Из этого соотношения видно, что давление при каждом ходе поршня убывает в одно и то же число раз, а именно в $(1 + \Delta V/V)$ раз. Поэтому

$$1/\eta = p_n\,/p_0 = (1 + \Delta V/V)^{-n}\,,$$

откуда

$$n = \ln\eta/\ln(1 + \Delta V/V)\,.$$

Задача 1.3

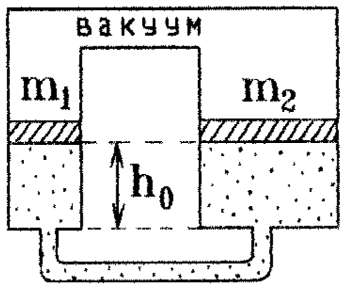

Рис.1.1

В двух вертикальных цилиндрах разного поперечного сечения, соединенных трубкой, под поршнями с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг находится идеальный газ. Снаружи поршней – вакуум. Поршни находятся на одинаковой высоте $h_0 = 20$ см (рис.1.1). Какова будет разность высот поршней, если массу первого из них увеличить до 2 кг ?

Решение

В начальном состоянии из условия равновесия $p_1 = p_2$ следует, что

$$m_1 g/S_1 = m_2 g/S_2 \quad \text{или} \quad m_1/m_2 = S_1/S_2\,.$$

Если массу левого поршня увеличить, то давление слева тоже увеличится, а справа – останется неизменным. Поэтому равновесие может наступить только в том случае, когда левый поршень ляжет на дно, и, следовательно, весь газ перейдет в правый цилиндр. Давление и температура газа не меняются, поэтому объем газа сохраняется, т.е.

$$S_1 h_0 + S_2 h_0 = S_2 \Delta h$$

(Δh – потому, что левый поршень лежит на дне). Подставляя численные данные, получаем

$$\Delta h = (S_1/S_2 + 1) \cdot h_0 = (m_1/m_2 + 1) \cdot h_0 = 0{,}3\,\text{м}\,.$$

Задача 1.4

Два баллона с объемами $V_1 = 200$ см^3 и $V_2 = 100$ см^3 соединены короткой трубкой, в которой имеется изолирующая пористая перегородка (с ее помощью можно добиться равенства давлений газа в баллонах, но не равенства температур !). Система находится при температуре 275° С и содержит кислород под давлением 760 мм.рт.столба. Какое давление установится в системе, если малый баллон поместить в сосуд со льдом при 0° С, а большой – в кипящую воду ?

Решение

Для начального состояния имеем $p_0(V_1 + V_2) = mRT_0/\mu$, откуда находим полную массу газа в системе $m = \mu p_0(V_1 + V_2)/RT_0$. Для установившихся конечных состояний из уравнения состояния следует:

$$pV_1 = m_1 RT_1/\mu \ \text{ и } \ pV_2 = (m - m_1)RT_2/\mu\,.$$

С учетом предыдущего равенства находим

$$pV_2 = \left(\frac{\mu p_0(V_1 + V_2)}{\mu RT_0} - \frac{\mu p V_1}{\mu RT_1}\right) RT_2\,,$$

откуда

$$p = p_0 \cdot \frac{T_1 T_2}{T_0} \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1 T_2 + V_2 T_1} = 461 \text{ мм рт.ст.}$$

Задача 1.5

Горизонтальный теплоизолированный закрытый цилиндр разделен на две равные части легкоподвижным поршнем радиуса $r = 10$ см и массы $m = 1$ кг. В каждой из половин цилиндра с объемом $V_0 = 5$ л находится двухатомный идеальный газ под давлением $p_0 = 10^5$ Па. Найти частоту колебаний поршня, возникающих при небольшом смещении его от положения равновесия (рис.1.2).

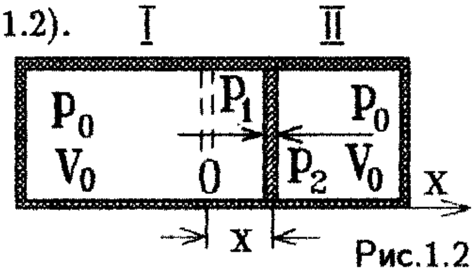

Рис.1.2

Решение

Закон движения поршня запишется в виде
$$\frac{d^2x}{dt^2} = (p_1 - p_2)S\,,$$
где p_1 и p_2 – давления газа слева и справа от поршня при малом его смещении на расстояние x вправо.

Так как $V_1 = V_0 + Sx$ и $V_2 = V_0 - Sx$, где $S = \pi r^2$, а изменения давлений происходят адиабатически, то $p_1 V_1^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma}$ и $p_2 V_2^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma}$, откуда находим
$$p_1 = p_0\left(1 + \frac{Sx}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx p_0\left(1 - \frac{\gamma Sx}{V_0}\right), \quad p_2 \approx p_0\left(1 + \frac{\gamma Sx}{V_0}\right).$$
Поэтому закон движения поршня принимает вид
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2\gamma S^2 p_0}{V_0}x\,.$$

Полученное уравнение является уравнением гармонических колебаний с циклической частотой
$$\omega = \sqrt{\frac{2\gamma S^2 p_0}{mV_0}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,,$$
где $k = \dfrac{2\gamma p_0 S^2}{V_0}$. Следовательно, $\nu = \omega/2\pi = r^2\sqrt{\gamma p_0/2mV_0} = 37,4$ Гц .

Заметим, что роль квазиупругих сил в этом случае выполняют не механические силы, стремящиеся уменьшить энергию системы, а энтропийные силы давления газа, стремящиеся увеличить энтропию системы.

2 Первое начало термодинамики

Первым началом термодинамики называется следующий постулат: "Существует функция состояния, называемая внутренней энергией, изменение которой равно сумме работы, совершенной над системой внешними силами, и количества тепла, переданного системе".

Для квазистатических процессов
$$dU = \delta A' + \delta Q\,. \tag{1.4}$$

Если вместо работы внешних сил $\delta A'$ рассматривать работу самой системы δA, то первое начало запишется в виде
$$\delta Q = \delta A + dU\,. \tag{1.5}$$

С учетом определения теплоемкости
$$\delta Q = C dT\,,$$
где $C = \delta Q/dT$ - теплоемкость системы, зависящая от вида процесса.

Работа расширения системы (в частности, идеального газа)

$$\delta A = pdV\,,$$

а изменение внутренней энергии идеального газа

$$dU = C_V dT\,,$$

где C_V – молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме.

Задача 2.1

Внутри закрытого теплоизолированного цилиндра с идеальным газом находится легкоподвижный поршень (рис.1.3). При равновесии поршень делит цилиндр на две равные части, в каждой из которых находится по одному молю идеального газа с температурой T_0. Поршень медленно перемещают, и температура газа меняется. Найти температуру газа как функцию n, где $n = V_1/V_2$ – отношение объема большей части к объему меньшей части. Показатель адиабаты равен γ.

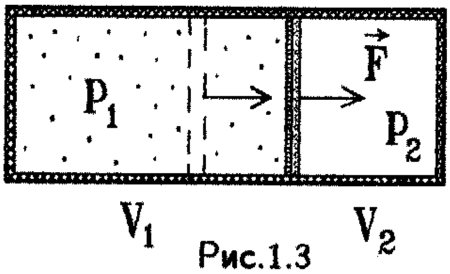

Рис.1.3

Решение

Работа внешней силы F идет на увеличение внутренней энергии газа во всем цилиндре, т.е. $\delta A' = dU = 2C_V dT$. Так как процесс – квазистатический, то

$$F + p_1 S = p_2 S\,,$$

где p_1 и p_2 – давления газа слева и справа от поршня. Следовательно,

$$\delta A' = Fdx = (p_2 - p_1)Sdx = (p_2 - p_1)dV_1\,.$$

С учетом того, что $dV_2 = -dV_1$ и $p_{1,2} = RT/V_{1,2}$, находим:

$$2C_V dT = -\frac{RT}{V_1}dV_1 - \frac{RT}{V_2}dV_2\,.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{2C_V}{R}\ln T = \ln\frac{K}{V_1V_2}\,,$$

где K – постоянная интегрирования, и, следовательно,

$$T = \left(\frac{K}{V_1V_2}\right)^{R/(2C_V)} = \mathrm{const}\cdot(V_1V_2)^{(1-\gamma)/2}\,,$$

так как $\dfrac{R}{2C_V} = \dfrac{C_P - C_V}{2C_V} = \dfrac{\gamma - 1}{2}$.

Выражая V_1 и V_2 через начальный объём цилиндра $2V_0$ и n с использованием очевидных соотношений $V_1/V_2 = n$ и $V_1 + V_2 = 2V_0$, находим

$$V_1 = 2nV_0/(n+1)\,,\quad V_2 = 2V_0/(n+1)\,,$$

откуда $V_1V_2 = 4V_0^2 n/(n+1)^2$.

Таким образом,

$$T = \text{const} \cdot \left(\frac{4V_0^2 n}{(n+1)^2} \right)^{(1-\gamma)/2} .$$

Определяя константу из начальных условий: $T = T_0$ при $n = 1$, получаем окончательно

$$T = T_0 \left(\frac{(n+1)^2}{4n} \right)^{(\gamma-1)/2} .$$

Например, для двухатомного газа ($i = 5$, $\gamma = 1,4$) при $n = 2$

$$T/T_0 = (9/8)^{0,2} = 1,024 .$$

Задача 2.2

В горизонтально расположенном теплоизолированном цилиндре, изображенном на рис.1.4, слева от поршня находится 1 моль идеального одноатомного газа, а справа – вакуум. Между поршнем и правой стенкой укреплена пружина, недеформированная в начальном положении. Если поршень освободить, то газ будет расширяться и сжимать пружину до тех пор, пока объем газа не увеличится вдвое в сравнении с первоначальным. Найти, как изменяются при этом температура и давление газа. Теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины пренебречь.

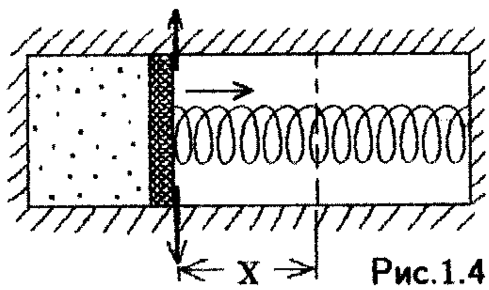

Рис.1.4

Решение

Расширяющийся газ производит работу по сжатию пружины, равную $kx^2/2$, за счет уменьшения своей внутренней энергии, т.е.

$$-\Delta U = kx^2/2 .$$

С учетом того, что $U = C_V T$, а $x = (V_2 - V_1)/S$, получаем

$$C_V(T_1 - T_2) = k(V_2 - V_1)^2/2S^2 . \tag{1.6}$$

С другой стороны, в состоянии равновесия

$$p_2 S = kx = k(V_2 - V_1)/S ,$$

что с учетом уравнения состояния (1.1) приводит к выражению

$$RT_2/V_2 = k(V_2 - V_1)/S^2 . \tag{1.7}$$

Разделив почленно равенства (1.7) и (1.6), находим:

$$\frac{C_V}{R}\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) ,$$

откуда следует

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{R}{2C_V}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) .$$

Используя уравнение состояния (1.1), можно наряду с отношением температур найти отношение давлений:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R}{2C_V}\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) + \frac{V_2}{V_1}.$$

Подстановка в эти выражения $C_V = 3R/2$ (для одноатомного газа) и $V_2/V_1 = 2$ дает

$$T_2/T_1 = 6/7, \quad p_2/p_1 = 3/7.$$

Задача 2.3

Найти зависимость скорости адиабатического течения идеального газа по трубе переменного сечения от параметров газа.

Решение

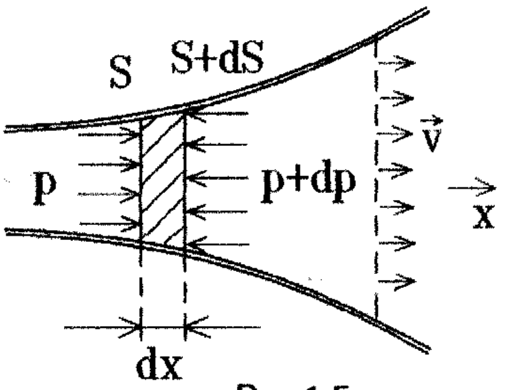

Рис.1.5

Рассмотрим течение идеального газа по участку трубы (или трубки тока), изображенному на рис.1.5. В случае невязкого газа скорость течения газа $\vec{v}$ можно считать одинаковой во всех точках поперечного сечения S трубы. Применим первое начало термодинамики (1.4) к слою газа толщины dx, имеющему массу δm и объём $\delta V = S\,dx$. При смещении этого слоя на расстояние dx внешние силы давления производят работу

$$\delta A' = [pS - (p+dp)(S+dS)]\,dx = -\delta V \cdot dp - p \cdot dS\,dx.$$

Здесь $dS \cdot dx = d(\delta V)$ – изменение объёма слоя, вызванное изменением площади сечения трубы, поэтому $\delta A' = -d(p\delta V)$. К внутренней энергии беспорядочного теплового движения молекул газа следует добавить кинетическую энергию движения слоя как целого: $dU = \delta m \cdot c_V dT + d(\delta m \cdot v^2/2)$. Тогда уравнение (1.4) даёт

$$d(\delta m \cdot c_V T + \delta m \cdot v^2/2 + p\delta V) = \delta Q.$$

Для адиабатического течения теплообмен газа с внешней средой отсутствует, т.е. $\delta Q = 0$. Тогда, используя уравнение состояния идеального газа $p\delta V = \dfrac{\delta m}{\mu}RT$, находим:

$$c_p T + v^2/2 = \text{const}. \tag{1.8}$$

Здесь

$$c_p = c_V + R/\mu \tag{1.9}$$

– удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении. Полученное уравнение (1.8) и есть решение поставленной задачи. Заметим, что оно является следствием уравнения Бернулли [2].

Задача 2.4

Идеальный двухатомный газ находится в теплоизолированном цилиндре под непроводящим тепло поршнем и имеет температуру T_1 и давление p_1. Какой будет установившаяся температура газа, если внешнее давление увеличится в 10 раз: а) квазистатически ? б) скачкообразно ?

Решение

В случае (а) ответ получается просто: достаточно записать уравнение Пуассона

$$pV^\gamma = \text{const}$$

и перейти с помощью уравнения состояния $pV = \nu RT$ к переменным p и T, что дает

$$Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const},$$

откуда $T_2 = 10^{2/7}T_1 = 1,93\,T_1$ (так как $\gamma = C_p/C_V = 1,4$).

В случае (б) внешние силы совершают работу по сжатию газа при постоянном давлении p_2:

$$A' = p_2(V_1 - V_2),$$

которая полностью идет на изменение внутренней энергии, т.е.

$$p_2(V_1 - V_2) = \nu C_V(T_2 - T_1). \tag{1.10}$$

С учетом уравнения (1.1) для начального и конечного равновесных состояний равенство (1.10) приводится к виду

$$p_2\nu R(T_1/p_1 - T_2/p_2) = \nu C_V(T_2 - T_1),$$

откуда находим

$$T_2 = \left(\frac{C_V}{C_p} + \frac{R}{C_p}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right)T_1 = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{p_2}{p_1}\right)T_1$$

и окончательно $T_2 = 3,57\,T_1$.

<u>Задача 2.5</u>

Найти скорость звука в воздухе при нормальных условиях.

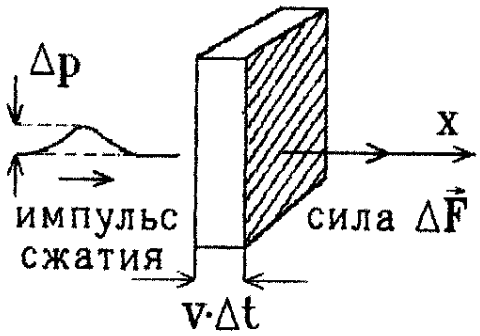

Рис.1.6

Решение

Рассмотрим распространение в газе слабого продольного импульса сжатия (рис.1.6). В целом газ с равновесной плотностью ρ_0 и давлением p_0 покоится. Подходящий к площадке S импульс сжатия увеличивает с одной стороны давление на Δp, и возникающая нескомпенсированная сила давления $\Delta F = \Delta p\cdot S$ сжимает газ, увеличивая его плотность на $\Delta\rho$, причём $\Delta p \ll p_0$ и $\Delta\rho \ll \rho_0$.

Избыточная масса газа $\Delta m = \Delta\rho\cdot Sv\Delta t$ приходит в движение со скоростью v и за время Δt протекает через площадку S (перемещение такой избыточной массы газа и создаёт распространяющийся со скоростью v импульс сжатия). Вызванное силой ΔF за время Δt

изменение импульса избыточной массы газа Δm определяется уравнением динамики: $\Delta F = (\Delta m \cdot v)/\Delta t = Sv^2 \Delta\rho$. Поэтому давление газа в месте прохождения импульса сжатия увеличивается на

$$\Delta p = \Delta F/S = v^2 \Delta\rho .$$

Отсюда, учитывая малость Δp и $\Delta\rho$, находим:

$$v = \sqrt{\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{\rho = \rho_0}} . \tag{1.11}$$

Так как звук – не что иное, как распространение в сплошной среде импульсов сжатия и разряжения, то формула (1.11) и представляет собою выражение для скорости звука.

Поскольку процесс чередования сжатий и разряжений происходит быстро, теплообмен между изображенным на рис.1.7 объемом и окружающей средой практически отсутствует, т.е. процесс распространения звука можно считать адиабатическим. Тогда из уравнения Пуассона, записанного в виде

$$p\rho^{-\gamma} = \mathrm{const} ,$$

и уравнения состояния (1.2) вытекает, что $(dp/d\rho)_0 = \gamma RT/\mu$ и

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma RT/\mu} . \tag{1.12}$$

Подставляя в (1.12) численные значения $R = 8,314$ Дж/(моль $\cdot$ К), $\gamma = 1,4$, $\mu = 0,029$ кг/моль и $T = 273$ К, находим

$$v_{\text{зв}} = 331 \text{ м/с} .$$

В заключение этого параграфа рассмотрим два примера, в которых используется так называемая барометрическая формула.

Барометрическая формула устанавливает зависимость плотности или давления газа, находящегося в однородном поле тяжести, от высоты над уровнем моря. Используя условие равновесия столба газа бесконечно малой высоты dh, можно показать, что давление в верхней точке столба меньше давления в нижней точке на величину

$$-\,dp = \rho g dh . \tag{1.13}$$

Выражая ρ через p из уравнения состояния, получим дифференциальное уравнение

$$-dp/p = (\mu g/RT)dh ,$$

которое легко интегрируется при $T = \mathrm{const}$. Поэтому

$$p(h) = p_0 \exp(-\mu g h/RT) , \quad \text{или} \quad \rho(h) = \rho_0 \exp(-\mu g h/RT) . \tag{1.14}$$

Это и есть барометрическая формула.

Задача 2.6

Вычислить теплоемкость вертикального столба воздуха бесконечной высоты и постоянного сечения, полагая воздух идеальным газом и считая, что он находится в однородном поле тяжести.

Решение

Несмотря на зависимость $\rho(h)$, в состоянии теплового равновесия температура столба должна быть одинаковой всюду, поэтому неоднородную систему можно разбить на такие мелкие части, что каждую из них можно считать однородной, а взаимодействием между ними пренебречь. Тогда энергия системы будет равна сумме энергий подсистем.

Энергия участка столба, лежащего между h и $h+dh$, состоит из внутренней энергии и потенциальной энергии, и равна $[u(T)+gh]\cdot \cdot\rho(h)dhS$, где $u(T)$ – внутренняя энергия единицы массы (удельная внутренняя энергия), S – сечение столба. Энергия бесконечного столба запишется как

$$E(T) = S\int\limits_0^\infty [u(T)+gh]\rho(h)\,dh\,,$$

или, с учетом (1.14),

$$E(T) = S\rho_0\int\limits_0^\infty [u(T)+gh]\exp(-\mu gh/RT)\,dh = M[u(T)+RT/\mu]\,,$$

где $M = \int\limits_0^\infty \rho(h)S\,dh = \rho_0 SRT/\mu g$ – полная масса столба.

Поэтому (по определению) теплоемкость системы

$$C = dE/dT = M(du/dT + R/\mu) = M(c_V + R/\mu) = Mc_p\,,$$

где c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении (1.9).

Задача 2.7

Доказать, что атмосфера с температурным градиентом, превосходящим адиабатический градиент температуры, будет устойчивой по отношению к конвекции.

Указание: Адиабатическим градиентом температуры называется величина

$$dT/dh = -(\gamma-1)\mu g/\gamma R = -9,78\ \text{К/км}\,.$$

Решение

Для атмосферы воспользуемся уравнением состояния идеального газа (1.2)

$$\rho = p\mu/RT\,,$$

дифференцируя которое найдем изменение плотности неравновесной атмосферы при бесконечно малом изменении ее давления и температуры:

$$d\rho = \frac{\mu dp}{RT} - \frac{\mu p dT}{RT^2} = \frac{\rho dp}{p} - \frac{\rho dT}{T}.$$

Предположим, что некоторый малый объем атмосферного воздуха самопроизвольно поднимается на высоту dh. Давление газа изменится вместе с изменением давления атмосферы на величину

$$dp = -\rho g dh,$$

а объем поднявшегося газа увеличится. Так как теплопроводность воздуха мала, то процесс расширения газа можно считать адиабатическим (он не успевает отдать тепло).

Уравнение адиабатического процесса запишем в виде

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const}$$

(так как $\rho = m/V$ и $pV^\gamma = \text{const}$). Вычисляя дифференциал этого выражения,

$$\rho^{-\gamma} dp - \gamma p \rho^{-\gamma-1} d\rho = 0,$$

находим изменение плотности воздуха при быстром (адиабатическом) подъеме:

$$d^A\rho = \frac{\rho dp}{\gamma p}.$$

Если плотность самопроизвольно поднявшегося воздуха будет больше плотности атмосферы на высоте $h + dh$, т.е.

$$\rho(h) + d^A\rho > \rho(h + dh) = \rho(h) + d\rho \text{ или } \frac{\rho dp}{\gamma p} > \frac{\rho dp}{p} - \frac{\rho dT}{T},$$

то под действием силы тяжести он опустится вниз. В противном случае атмосфера потеряет устойчивость — возникнет быстрая адиабатическая конвекция воздуха в вертикальном направлении.

Подставляя в полученное неравенство $dp = -\rho g dh$, получим условие устойчивости атмосферы в виде

$$\frac{dT}{T} > \frac{dp}{p} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma} = -\frac{\rho}{p}\frac{\gamma - 1}{\gamma} g dh$$

или, с учетом уравнения (1.2),

$$\frac{dT}{dh} > -\frac{\mu g(\gamma - 1)}{\gamma R}. \tag{1.15}$$

А так как воздух можно считать двухатомным газом ($\gamma = 7/5$), то

$$\frac{dT}{dh} > -\frac{2\mu g}{7R} = -9{,}78 \cdot 10^{-3} \text{ К/м}.$$

3 Второе начало термодинамики

Второе начало термодинамики утверждает, что:

1) существует функция состояния – энтропия, бесконечно малое изменение которой равно

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T},$$

где $\delta Q_{\text{обр}}$ – количество тепла, обратимо подведенного к системе;

2) энтропия изолированной системы не убывает; она может только возрастать или оставаться неизменной (в случае, если все процессы в системе обратимые).

Все квазистатические процессы – обратимы, неквазистатические – необратимы (за малым исключением).

Изменение энтропии системы легко подсчитать, поскольку

$$\Delta S_{\text{сист}} = \sum \Delta S_i \ , \ \text{а} \ \Delta S_i = \int \frac{\delta Q_{i\ \text{обр}}}{T} . \qquad (1.16)$$

Так, например, для идеального газа

$$\Delta S = \nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \nu C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \nu R \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + \nu C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) ; \qquad (1.17)$$

а при фазовом переходе первого рода

$$\Delta S = \frac{Q_{\text{обр}}}{T} = \frac{\lambda m}{T}, \qquad (1.18)$$

где λ – удельная теплота перехода, m – масса системы, а T – температура перехода.

При $T \to 0$ энтропия системы стремится к нулю (это – так называемое третье начало термодинамики).

Задача 3.1

Два цилиндра соединены капилляром с краном, как показано на рис.1.7. В цилиндре 1 под давлением p находятся ν молей идеального одноатомного газа. Цилиндр 2 открытым концом соединен с атмосферой, давление которой $p_0 < p$. В нем находится легкий поршень П, вначале прижатый к левой стенке цилиндра 2. При открывании крана К газ перетекает из цилиндра 1 в цилиндр 2, и поршень П медленно перемещается до установления равновесия. Найти изменение полной энтропии системы (газа и окружающей среды), считая, что процесс перетекания газа происходит при неизменной температуре T_0 окружающей среды.

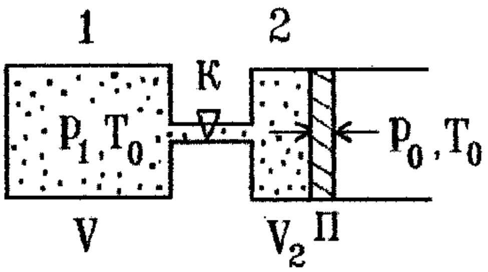

Рис.1.7

Решение

Запишем уравнения состояния (1.1) для газа в обоих цилиндрах:

$$p_1 V = (\nu - x) R T_0 ; \quad p_2 V_2 = x R T_0 ,$$

где x – число молей газа, перетёкших во второй цилиндр. Так как массой свободного поршня П можно пренебречь, то квазиравновесное давление газа в цилиндре 2 равно давлению атмосферы: $p_2 = p_0 = \text{const}$. Тогда изменение давления в цилиндре 1 и изменение объёма газа в цилиндре 2 связаны соотношением $V dp_1 = -p_0 dV_2$. Отсюда следует, что

$$V \int\limits_{p}^{p_0} dp_1 = -p_0 \int\limits_{0}^{V_2} dV_2 \quad \text{или} \quad (p - p_0)V = p_0 V_2 .$$

Расширяющийся газ будет перемещать поршень при постоянном давлении p_0 и, следовательно, совершит работу $A = p_0 V_2 = pV(1 - p_0/p) = \nu R T_0 (1 - p_0/p)$. Его внутренняя энергия U при этом не изменится, т.е. внешняя среда отдаст газу тепло $Q = A$ (при неизменной температуре). Поэтому энтропия внешней среды уменьшится на величину

$$\Delta S_{\text{внеш}} = \frac{-Q}{T_0} = -\frac{A}{T_0},$$

а энтропия газа должна увеличиться.

Процесс расширения газа в условиях задачи – неравновесный, давление газа меняется по-разному в цилиндрах 1 и 2. Этот процесс необратим, следовательно $dS_{\text{газа}} > \delta Q/T_0$. Поэтому вычислять изменение энтропии при необратимых процессах через сообщённое системе тепло нельзя. Однако энтропия – функция состояния, т.е. её изменение зависит только от начального и конечного состояний системы. Так как температура газа остаётся неизменной, и его конечное состояние определяется уравнением $p_0 (V + V_2) = \nu R T_0$, то изменение энтропии можно вычислить по формуле (1.17):

$$\Delta S_{\text{газа}} = \nu R \ln\left(\frac{V + V_2}{V}\right) = -\nu R \ln\left(\frac{p_0}{p}\right).$$

Изменение энтропии всей системы

$$\Delta S = \Delta S_{\text{газа}} + \Delta S_{\text{внеш}} = -\nu R \left[\ln\left(\frac{p_0}{p}\right) + 1 - \frac{p_0}{p}\right].$$

Можно показать, что $\Delta S > 0$. Для этого удобно переписать ΔS в виде

$$\Delta S = -\nu R \left[z + \ln(1 - z)\right],$$

где $z = (p - p_0)/p < 1$, и разложить $\ln(1 - z)$ в степенной ряд [4]:

$$\ln(1 - z) = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right).$$

В итоге получим:

$$\Delta S = +\nu R \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right) > 0.$$

Заметим, что если в условиях этой задачи убрать легкий поршень (рис.1.7), то окончательный результат будет тем же самым.

Задача 3.2

Кусок льда, температура которого $t = 0\,^\circ$C, помещен в теплоизолированную оболочку. При сжатии льда до давления 100 атм его температура плавления уменьшается на $0,72^\circ$ C. Что произойдет с энтропией системы, и какая часть льда при этом расплавится ?

Решение

Обозначим массу льда через m, массу расплавившегося льда через Δm, $T_0 = 273$ K, $\Delta T = 0,72$ K, $T_{\text{пл}} = T_0 - \Delta T$, а из таблиц найдем удельную теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2,09$ кДж/(кг · К) и удельную теплоту плавления льда $q = 333$ кДж/кг.

Тогда изменение энтропии будет равно

$$\Delta S = \frac{q\Delta m}{T_{\text{пл}}} + c_{\text{л}} m \ln\left(\frac{T_{\text{пл}}}{T_0}\right),$$

где первое слагаемое – увеличение энтропии при плавлении льда, а второе – уменьшение энтропии при охлаждении всей массы льда (согласно формулам (1.18) и (1.16) с учетом того, что $\delta Q = c_{\text{л}} m dT$).

Из закона сохранения энергии следует: $q\Delta m = c_{\text{л}} m \Delta T$, поэтому

$$\Delta S = \frac{c_{\text{л}} m \Delta T}{T_{\text{пл}}} + c_{\text{л}} m \ln\frac{T_{\text{пл}}}{T_0} = c_{\text{л}} m\left(\frac{\Delta T}{T_0 - \Delta T} + \ln\frac{T_0 - \Delta T}{T_0}\right).$$

Обозначив $\Delta T/T_0 = z$, приводим выражение для ΔS к виду

$$\Delta S = c_{\text{л}} m\left(\frac{z}{1-z} + \ln(1-z)\right).$$

Разлагая оба слагаемых в ряды [4], получим

$$\Delta S = c_{\text{л}} m\left[z(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) - \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right)\right] =$$

$$= c_{\text{л}} m\left(\frac{z^2}{2} + \frac{2z^3}{3} + \ldots\right) > 0.$$

Заметим, что такой процесс плавления части льда действительно возможен, так как энтропия системы при этом увеличивается.

С учетом численных данных находим $z = 2,64 \cdot 10^{-3}$ и $z^2/2 = 6,96 \cdot 10^{-6}$ (остальными членами ряда можно пренебречь ввиду их малости), что дает $\Delta S/m = 7,27 \cdot 10^{-3}$ Дж/(кг · К), а из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_{\text{л}}\Delta T}{q} = 4,52 \cdot 10^{-3}.$$

Задача 3.3

Два теплоизолированных баллона одинакового объема V_0 соединены капилляром с краном К (рис.1.8). В одном из них находится ν молей идеального двухатомного газа, другой откачан до высокого вакуума.

Кран К открывают, и газ начинает перетекать из баллона 1 в баллон 2. Процесс происходит достаточно медленно для того, чтобы в каждом баллоне газы находились в квазистатическом равновесии, но достаточно быстро для того, чтобы прямым теплообменом между баллонами можно было пренебречь. **После того, как давления в баллонах выровнялись, кран К закрывают.** Найти число молей газа, перешедших из 1-го во 2-й баллон, температуры и давления в обоих баллонах, а также изменение энтропии газа в этом процессе. При решении считать, что изменение состояния в баллоне 1 происходит адиабатически.

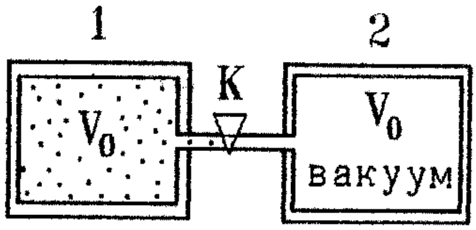

Рис.1.8

Решение

Параметры начального состояния в баллоне 1 обозначим как p_0, V_0, T_0, ν молей, а конечного состояния – как $p, V_0, T_1, (\nu - x)$ молей, где x – число молей газа, перешедших из баллона 1 в баллон 2. Чтобы записать уравнение адиабаты, нужно преобразовать эти параметры к постоянному числу молей. Так как в конечном состоянии $(\nu - x)$ молей газа занимают объем V_0, то ν молей занимали бы объем $V_0\nu/(\nu - x)$; поэтому конечное состояние следует характеризовать параметрами p, $\nu V_0/(\nu - x)$, T_1, ν. Таким образом,

$$T_1\left(\frac{\nu}{\nu - x}V_0\right)^{\gamma - 1} = T_0 V_0^{\gamma - 1},$$

откуда

$$T_1 = T_0\left(\frac{\nu - x}{\nu}\right)^{\gamma - 1} = T_0\left(1 - \frac{x}{\nu}\right)^{\gamma - 1} < T_0,$$

т.е. температура в баллоне 1 падает (и давление, разумеется,тоже).

Но из закона сохранения энергии для всей системы следует, что

$$\Delta U = (\nu - x)C_V(T_1 - T_0) + xC_V(T_2 - T_0) = 0,$$

откуда с неизбежностью вытекает, что $T_2 > T_0$, т.е. газ, перетекающий из баллона 1 в баллон 2, **нагревается.**

Из уравнений состояния для газа в обоих баллонах, имеющих вид $p_1V_0 = (\nu - x)RT_1$ и $p_2V_0 = xRT_2$, следует, что $(\nu - x)T_1 = xT_2$, так как по условию задачи в конечном состоянии $p_1 = p_2$. Совместно с законом сохранения энергии это дает:

$$T_1 = T_0\frac{\nu}{2(\nu - x)}, \quad T_2 = T_0\frac{\nu}{2x}.$$

Первое из этих равенств вместе с уравнением адиабаты позволяет найти x: $\nu T_0/2(\nu - x) = (1 - x/\nu)^{\gamma - 1}T_0$, откуда $(1 - x/\nu)^{\gamma} = 1/2$ и

$$x = \nu(1 - 2^{-1/\gamma}).$$

Учитывая, что $\gamma = 1,4$, получаем следующие численные значения:

$$\frac{x}{\nu} = 0,390\,, \quad \frac{T_1}{T_0} = 0,820\,, \quad \frac{T_2}{T_0} = 1,28\,.$$

Теперь из уравнений состояния находим

$$p_2 = p_1 = \frac{(\nu - x)RT_1}{V_0} = \frac{(\nu - x)RT_0}{2(1 - x/\nu)V_0} = \frac{\nu RT_0}{2V_0} = \frac{p_0}{2}\,.$$

Хотя процесс перетекания газа необратим, но изменение энтропии для газа в каждом баллоне можно вычислить по формуле (1.17), так же, как это было сделано в задаче 3.1. Поэтому изменение энтропии всей системы

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = (\nu - x)C_p \ln\frac{T_1}{T_0} + (\nu - x)R\ln\frac{p_0}{p_1} +$$

$$+xC_p \ln\frac{T_2}{T_0} + xR\ln\frac{p_0}{p_2} = \nu R\left\{\ln 2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left[\left(1 - \frac{x}{\nu}\right)\ln\frac{T_1}{T_0} + \frac{x}{\nu}\ln\frac{T_2}{T_0}\right]\right\}.$$

Подстановка численных значений x, T_1 и T_2 дает

$$\Delta S = +0,609\,\nu R\,.$$

Задача 3.4

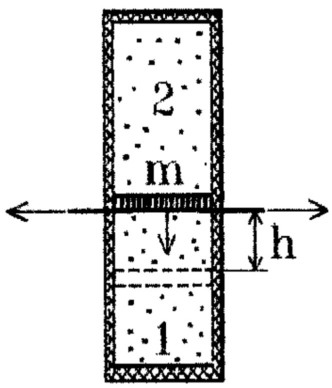

Рис.1.9

В расположенном вертикально теплоизолированном цилиндре радиуса r имеется теплопроводящий поршень массы m, закрепленный так, что он делит цилиндр на две равные части (рис.1.9). В каждой из частей находится ν молей идеального газа при температуре T_0 и давлении p_0. Крепление поршня удаляется, и под действием силы тяжести он опускается. Найти изменение энтропии системы к моменту установления равновесия. Считать, что $\pi r^2 p_0 \gg mg$.

Решение

При опускании поршня на высоту h первоначально одинаковые объёмы V_0 каждой части сосуда изменятся: объём над поршнем увеличится до $V_2 = V_0 + h\pi r^2$, а под поршнем – уменьшится до $V_1 = V_0 - h\pi r^2$. Сила тяжести совершит над системой работу

$$A' = mgh = \frac{mg}{\pi r^2}(V_2 - V_0) = \frac{mg}{\pi r^2}(V_0 - V_1)\,, \qquad (1.19)$$

а так как цилиндр теплоизолирован и $\Delta Q = 0$, то согласно формуле (1.4) эта работа пойдёт на нагревание газа в обеих частях до одинаковой температуры:

$$A' = \Delta U = \nu C_V \Delta T\,, \quad \text{откуда } T_1 = T_2 = T_0 + \frac{A'}{\nu C_V}\,. \qquad (1.20)$$

Равновесие поршня наступит при условии

$$p_1 = p_2 + mg/\pi r^2 .$$

Используя уравнение состояния (1.1), перепишем это условие в виде

$$\frac{\nu RT_1}{V_1} = \frac{\nu RT_2}{V_2} + \frac{mg}{\pi r^2} . \tag{1.21}$$

Исключим теперь из полученных уравнений (1.19), (1.20) и (1.21) неизвестную температуру $T_1 = T_2$ и объёмы V_1 и V_2, учитывая, что $V_1 + V_2 = 2V_0$. Получим квадратное уравнение

$$\left(1 + \frac{2R}{C_V}\right) \cdot A'^2 + 2\nu RT_0 A' - \left(\frac{mg}{\pi r^2}\right)^2 V_0^2 = 0 ,$$

дискриминант которого вследствие малости величины $mg/(\pi r^2 p_0)$ можно записать в виде

$$\sqrt{(2\nu RT_0)^2 + 4\left(1 + \frac{2R}{C_V}\right)\left(\frac{mg}{\pi r^2}V_0\right)^2} = 2\nu RT_0\sqrt{1 + \left(1 + \frac{2R}{C_V}\right)\left(\frac{mg}{\pi r^2 p_0}\right)^2} \approx$$

$$\approx 2\nu RT_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2R}{C_V}\right)\left(\frac{mg}{\pi r^2 p_0}\right)^2\right] .$$

Тогда для A' находим выражение

$$A' = \frac{1}{2} p_0 V_0 \left(\frac{mg}{\pi r^2 p_0}\right)^2 . \tag{1.22}$$

Изменение энтропии при квазистатическом (обратимом) опускании поршня определяется формулой (1.17). С учётом уравнений (1.19), (1.20) и (1.22) и уравнения состояния (1.1) получаем:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \left[\nu C_V \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)\right] +$$

$$+ \left[\nu C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)\right] = 2\nu C_V \ln\left[1 + \frac{R}{2C_V}\left(\frac{mg}{\pi r^2 p_0}\right)^2\right] +$$

$$+ \nu R \ln\left[1 - \left(\frac{mg}{2\pi r^2 p_0}\right)^2\right] = \frac{3}{4}\nu R\left(\frac{mg}{\pi r^2 p_0}\right)^2 > 0 ,$$

при получении которой использовано разложение в ряд

$$\ln(1 \pm z) = \pm z - z^2/2 \pm \cdots$$

с точностью до членов первого порядка по $z \sim \left(\dfrac{mg}{\pi r^2 p_0}\right)^2 \ll 1$.

Задача 3.5

Какое количество тепла необходимо сообщить комнате с объемом 40 м^3, чтобы повысить температуру воздуха в ней от 0° до 20° С ? Как при этом изменится внутренняя энергия воздуха в комнате и энтропия ? Воздух считать идеальным газом, а атмосферное давление –

нормальным.

Решение

При решении следует учесть, что, несмотря на повышение температуры, давление воздуха в комнате остается постоянным и равным атмосферному, вследствие того, что часть воздуха уходит наружу, в атмосферу. Поэтому в формуле $\delta Q = \nu C_p\, dT$ число молей ν будет переменной величиной, убывающей с температурой, как это следует из уравнения состояния идеального газа: $\nu = pV/RT$. Таким образом,

$$\delta Q = \frac{pV}{RT} C_p\, dT = \frac{pV}{T}\left(\frac{i}{2}+1\right) dT\,;\ \ Q = pV\left(\frac{i}{2}+1\right)\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \approx 10^6 \text{ Дж}.$$

Внутренняя энергия воздуха в комнате

$$U = \nu C_V T = (pV/RT)(i/2)RT = ipV/2$$

от температуры не зависит (а зависит только от атмосферного давления) и поэтому при нагревании не меняется.

Таким образом, **все сообщаемое воздуху в комнате тепло уходит наружу — мы отапливаем атмосферу.** (Заметим, что согласно Зоммерфельду [1] внутренняя энергия воздуха в комнате при отоплении даже убывает, если считать воздух реальным газом.)

Энтропия всего воздуха (как остающегося в комнате, так и покидающего её) при нагревании возрастает на величину

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \left(\frac{i}{2}+1\right) pV \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2} = \left(\frac{i}{2}+1\right) pV \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 3{,}55\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}}.$$

Что касается энтропии воздуха, остающегося в комнате, то при нагревании на dT количество молей воздуха в комнате изменится (уменьшится) на $d\nu = d(pV/RT) = -pV\,dT/(RT^2)$; поэтому согласно формуле (1.17) энтропия остающегося в комнате воздуха при изобарическом нагревании на dT изменится на

$$dS = (\nu + d\nu)C_p \ln\left(\frac{T+dT}{T_1}\right) - \nu C_p \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) =$$

$$= (\nu + d\nu)C_p \left[\ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \ln\left(1 + \frac{dT}{T}\right)\right] - \nu C_p \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) =$$

$$= d\nu \cdot C_p \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \nu C_p \ln\left(1+\frac{dT}{T}\right) = \frac{pV}{RT^2} C_p\, dT \left[1 - \ln\left(\frac{T}{T_1}\right)\right] > 0\,,$$

т.е. энтропия будет возрастать, так как при условиях задачи $\ln(T/T_1) < \ln(T_2/T_1) < 1$. Но, как видно из последней формулы, быстрота увеличения энтропии будет падать с ростом температуры T.

Задача 3.6

В теплоизолированном сосуде находилось $\nu = 1$ моль двухатомного газа. При нагревании до $T = 600$ К половина молекул этого газа диссоциировала. Воображаемая идеальная машина ("Демон Ма́ксвелла") разделяет смесь газов на отдельные компоненты. Какую наименьшую работу следует совершить "демону", чтобы при неизменной температуре T разделить диссоциировавшие одноатомные молекулы и оставшиеся недиссоциированными двухатомные молекулы ?

Решение

После разделения $\nu_1 = 2 \cdot (\nu/2) = \nu$ молей одноатомного газа занимают объём V_1, а $\nu_2 = \nu/2$ молей двухатомного газа – объём V_2, где $V_1 + V_2 = V$ – объём всего сосуда. Поэтому изменение энтропии газов можно вычислить для процесса изотермического сжатия каждого из газов от объёма V до объёмов V_1 и V_2 соответственно, т.е. согласно формуле (1.17)

$$\Delta S_{\text{газ}} = \nu_1 R \ln\left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right) + \nu_2 R \ln\left(\frac{V_2}{V_1 + V_2}\right) = \frac{\nu R}{2} \ln\left(\frac{V_1^2 V_2}{(V_1 + V_2)^3}\right).$$

Давления газов после разделения будут одинаковыми: $p_1 = p_2$ или $\nu_1 RT/V_1 = \nu_2 RT/V_2$, откуда $V_1 = 2V_2$. В результате энтропия газов должна уменьшаться: $\Delta S_{\text{газ}} = (\nu R/2) \cdot \ln(4/27) < 0$.

Второе начало термодинамики утверждает, что энтропия замкнутой системы убывать не может: $\Delta S_{\text{газ}} + \Delta S_{\text{дем}} \geqslant 0$, т.е. "демон Максвелла" должен увеличивать энтропию, производя работу при неизменной температуре T:

$$\Delta S_{\text{дем}} = \frac{A}{T} \geqslant -\Delta S_{\text{газ}}, \text{ откуда } A \geqslant -\frac{\nu RT}{2} \ln\left(\frac{4}{27}\right) = 4,76 \text{ кДж}.$$

4 Циклические процессы и тепловые машины

Любая тепловая машина (например, двигатель внутреннего сгорания, холодильник, калорифер и т.п.) работает по замкнутому циклу. Согласно второму началу термодинамики не существует машины, к.п.д. которой был бы равен 1 (вечного двигателя второго рода). Максимальный к.п.д. имеет обратимый цикл Карно с любым рабочим веществом:

$$\eta_{\text{К}} = 1 - T_2/T_1, \tag{1.23}$$

где T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника.

К.п.д. любого другого цикла, определяемый как

$$\eta = A/Q_1 = 1 - Q_2/Q_1, \tag{1.24}$$

где A – работа за один цикл, Q_1 и Q_2 – количество тепла, полученное от нагревателя и отданное холодильнику соответственно, меньше или равен к.п.д. обратимого цикла Карно.

Машина, работающая по обратному циклу ($A \leqslant 0$, т.е. работа совершается не рабочим телом, а над рабочим телом внешними силами), характеризуется эффективностью

$$\eta_Э = Q_2/(Q_1 - Q_2). \qquad (1.25)$$

Задача 4.1

Найти к.п.д. цикла, состоящего из трех адиабат и трех изобар (рис.1.10), если известно, что $T_2/T_1 = \alpha$, $T_3/T_1 = \beta$, $T_5 = T_3$ и работы на участках 3 – 4 и 5 – 6 одинаковы. При каком условии полная работа за цикл будет максимальной (при заданных температурах T_1 и T_3)?

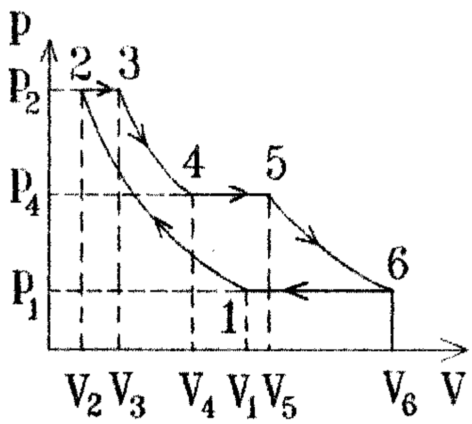

Рис.1.10

Решение

По условию задачи

$$A_{34} = A_{56} \text{ или } \nu C_V(T_3 - T_4) = \nu C_V(T_5 - T_6),$$

откуда следует, что $T_4 = T_6$. Для адиабат 3 – 4 и 5 – 6 запишем уравнения Пуассона

$$T_3/T_4 = (p_2/p_4)^{(\gamma-1)/\gamma} \text{ и } T_5/T_6 = (p_4/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma},$$

из которых находим, что $p_2/p_4 = p_4/p_1$.

Для адиабаты 1 – 2 аналогичное уравнение имеет вид $T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$, а, так как $p_2/p_1 = (p_2/p_4)(p_4/p_1)$, то $T_2/T_1 = (T_3/T_4)^2$ и $T_4 = T_3\sqrt{T_1/T_2}$.

Теперь выразим все температуры через T_1, используя данные задачи:

$$T_2 = \alpha T_1,\ T_3 = \beta T_1,\ T_4 = T_3/\sqrt{\alpha} = (\beta/\sqrt{\alpha})T_1,\ T_5 = T_3,\ T_6 = T_4.$$

С учетом этих соотношений можно без особых затруднений найти работу за цикл A и количество тепла Q_1, полученное от нагревателя (на участках 2 – 3 и 4 – 5):

$$Q_1 = \nu C_p(T_3 - T_2) + \nu C_p(T_5 - T_4) = \nu C_p T_1(2\beta - \alpha - \beta/\sqrt{\alpha}),$$

$$Q_2 = \nu C_p(T_6 - T_1) = \nu C_p T_1(\beta/\sqrt{\alpha} - 1),$$

$$A = Q_1 - Q_2 = \nu C_p T_1(2\beta - \alpha - 2\beta/\sqrt{\alpha} + 1).$$

Следовательно, к.п.д. цикла имеет величину

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{2\beta(1 - 1/\sqrt{\alpha}) + 1 - \alpha}{\beta(2 - 1/\sqrt{\alpha}) - \alpha},$$

а условием максимума работы является соотношение

$$\beta = \alpha^{3/2},$$

которое легко получить из уравнения $\partial A/\partial\alpha = 0$.

Задача 4.2

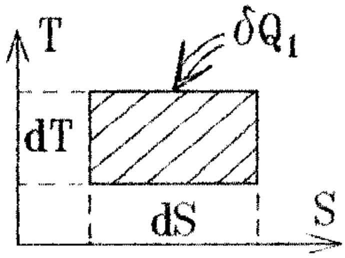

Рис.1.11

Доказать, используя цикл Карно, очень важное термодинамическое соотношение

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\,. \qquad (1.26)$$

Решение

На диаграмме $T-S$ бесконечно малый цикл Карно изобразится прямоугольником (рис.1.11), поэтому работа за цикл (заштрихованная площадь)

$$\delta A = dT\cdot dS\,,$$

а полученное рабочим телом при изотермическом процессе ($T = \mathrm{const}$) тепло

$$\delta Q_1 = dU + pdV = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]dV\,.$$

Изменение внутренней энергии при таком процессе не равно нулю, так как для произвольной термодинамической системы внутренняя энергия зависит не только от T, но и от объёма V, т.е. $U = U(T,V)$. С другой стороны, изменение энтропии $S = S(T,V)$ запишется для изотермического процесса в виде

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV\,.$$

Чтобы избавиться от производной $\partial S/\partial V$, введём новую функцию состояния $F = U - TS$, которая называется свободной энергией, и для которой

$$dF = dU - d(TS) = -SdT - pdV\,.$$

Из этого выражения и определения полного дифференциала функции двух переменных $F = F(T,V)$ следует:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S\,,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V} = -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

Поэтому при изотермическом процессе $dS = (\partial p/\partial T)_V\,dV$. Подставляя полученные выражения в формулы (1.23) и (1.24) для к.п.д. цикла Карно, получим:

$$\eta = \frac{dT}{T} = \frac{\delta A}{\delta Q_1} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dTdV}{\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]dV} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\,.$$

Соотношение (1.26) позволяет найти $U(T,V)$ – внутреннюю энергию системы – по известному уравнению состояния.

Задача 4.3

Изображенный на рис.1.12 цикл состоит из адиабаты, изотермы и двух изобар. Нарисовать его на диаграмме $T-S$ и вычислить его к.п.д., если известно, что рабочее вещество – 1 моль двухатомного идеального газа и $V_2/V_1 = 2$, а $T_2/T_3 = 3$.

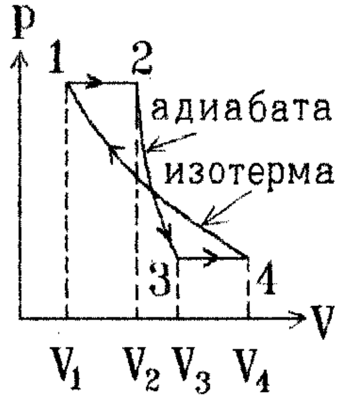

Рис.1.12

Решение

Решение первой части задачи представлено на рис.1.13. Для вычисления к.п.д. находим

$Q_1 = Q_{21} + Q_{34} = C_p(T_2 - T_1) + C_p(T_1 - T_3) =$
$= C_p T_1(T_2/T_1 - T_3/T_1) = C_p T_1(V_2/V_1 - V_3/V_4)$;
$Q_2 = |Q_{41}| = RT_1 \ln(V_4/V_1)$.

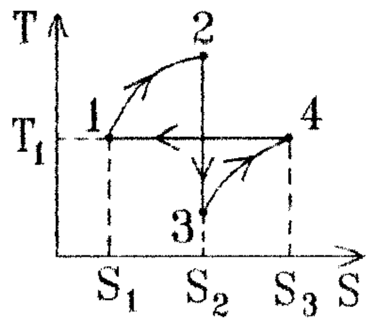

Рис.1.13

Из уравнения адиабаты 2 – 3 следует, что $V_3/V_2 = (T_2/T_3)^{1/(\gamma-1)}$, а из уравнений изобар 1 – 2 и 3 – 4 имеем $V_4/V_3 = T_1/T_3$ и $V_2/V_1 = T_2/T_1$. Следовательно, $(V_4/V_3)\cdot(V_2/V_1) = T_2/T_3$, откуда $V_4/V_1 = (T_2/T_3)\cdot(V_3/V_2) = (T_2/T_3)^{\gamma/(\gamma-1)}$ и $V_4/V_3 = (T_2/T_3)\cdot(V_1/V_2)$. Поэтому, учитывая, что $C_p = \gamma R/(\gamma-1)$, находим:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{RT_1 \ln(V_4/V_1)}{C_p T_1(V_2/V_1 - V_3/V_4)} = 1 - \frac{\ln(T_2/T_3)}{(V_2/V_1)\,[1-(T_3/T_2)]}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\eta = 1 - \ln 3/(2 - 0,667) = 0,176 \quad \text{или} \quad \eta = 17,6\%.$$

Задача 4.4

Один киломоль воды охлаждается от 298 K до 273 K и замерзает. Все выделившееся тепло с помощью идеального рефрижератора идет на нагревание одного киломоля воды от 298 K до 373 K и частичное выпаривание ее. Сколько воды превращается в пар и какую работу совершает рефрижератор в данном процессе? Для воды $c = 4,18$ кДж/(кг · K), $\lambda = 2250$ кДж/кг и $q = 333$ кДж/кг.

Решение

Введем обозначения: $T_1 = 273$ K, $T_2 = 298$ K, $T_3 = 373$ K, $m = 18$ кг (масса 1 киломоля воды). Всю энергию (тепло), выделившуюся при остывании и замерзании 1 киломоля воды, использовать для последующего нагревания невозможно. Даже идеальная машина должна передать часть этой энергии окружающей среде. Однако, считая систему теплоизолированной, а все процессы (нагревание, замерзание и испарение воды) – **обратимыми**, можно учесть тот факт, что энтропия системы при обратимом циклическом процессе, совершаемом рефрижератором, измениться не должна:

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{T} = \underbrace{\int_0^m \frac{q\,dm}{T_1}}_{\substack{\text{замерзание}\\ \text{воды}}} + \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} \frac{cm\,dT}{T}}_{\substack{\text{остывание}\\ \text{воды}}} - \underbrace{\int_{T_2}^{T_3} \frac{cm\,dT}{T}}_{\substack{\text{нагревание}\\ \text{воды}}} - \underbrace{\int_0^{\Delta m} \frac{\lambda\,dm}{T_3}}_{\substack{\text{испарение}\\ \text{части воды}}} = 0\,,$$

откуда

$$cm\ln(T_3/T_2) + \lambda\Delta m/T_3 = cm\ln(T_2/T_1) + qm/T_1\,,$$

и, следовательно,

$$\Delta m = (T_3\, m/\lambda)\cdot\left[c\ln(T_2^2/T_1T_3) + q/T_1\right] = 1,63\ \text{кг}\,.$$

Работа, совершаемая рефрижератором, определяется, как

$$A = Q_1 - Q_2 = \left[cm(T_3-T_2)+\lambda\Delta m\right] - \left[cm(T_2-T_1)+qm\right] = 1,44\ \text{МДж}\,.$$

Задача 4.5 (Тепловой насос)

Устройство, поглощающее тепло из окружающей здание среды и передающее его внутрь здания, называется тепловым насосом. Считая, что температура воздуха на улице $t_2^\circ = -20\,^\circ\text{C}$, а внутри здания поддерживается постоянная температура $t_1^\circ = +20\,^\circ\text{C}$, и что эффективность теплового насоса равна половине от максимально возможной, вычислить работу, которую должен совершить тепловой насос за $\tau = 1$ час, если скорость утечки тепла через стены $J_Q = 3,7$ кДж/с. Найти изменение энтропии, вызванное работой теплового насоса.

Решение

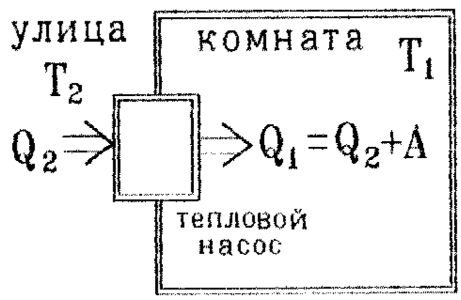

Рис.1.14

Тепловой насос является разновидностью холодильника, морозильной камерой которого служит холодная атмосфера вне здания (рис.1.14). Это — тепловая машина, работающая по некоторому обратимому циклу. За счёт совершения над рабочим телом работы A тепловой насос забирает вне здания тепло Q_2 и передаёт более нагретому воздуху внутри здания тепло $Q_1 = Q_2 + A$.

Максимальной эффективностью обладает машина, работающая по циклу Карно. Согласно формуле (1.25) и условию задачи эффективность рассматриваемого теплового насоса составит

$$\eta_э = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{2}\eta_{э\max} = \frac{1}{2}\cdot\frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

откуда $Q_2 = Q_1T_2/(2T_1 - T_2)$ и

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_1\frac{2T_1 - 2T_2}{2T_1 - T_2} = 2J_Q\frac{T_1 - T_2}{2T_1 - T_2}\cdot\tau = 3,2 \text{ МДж};$$

(заметим, что каждый джоуль электроэнергии, затраченный на работу теплового насоса, позволяет передать внутрь здания 4,16 Дж тепла).

При вычислении суммарного изменения энтропии следует учесть убыль энтропии ($-Q_2/T_2$) окружающей атмосферы, отдающей тепло при температуре T_2, и увеличение энтропии внутри здания (Q_1/T_1). А так как в результате циклического процесса энтропия самой тепловой машины не меняется: $\Delta S_{\text{цикла}} = 0$, то

$$\Delta S_{\text{системы}} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1(2T_1 - T_2)} = \frac{A}{2T_1} = 5,46 \text{ кДж/К}.$$

При этом не учитывается увеличение энтропии при необратимой утечке тепла за стены здания.

5 Неидеальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса.

Общего уравнения состояния реального (неидеального газа) не существует, поскольку разные газы имеют отличия в уравнении состояния. Теоретически точное уравнение состояния реального газа можно представить в виде бесконечного ряда по обратным степеням молярного объема V_m (так называемое вириальное разложение) :

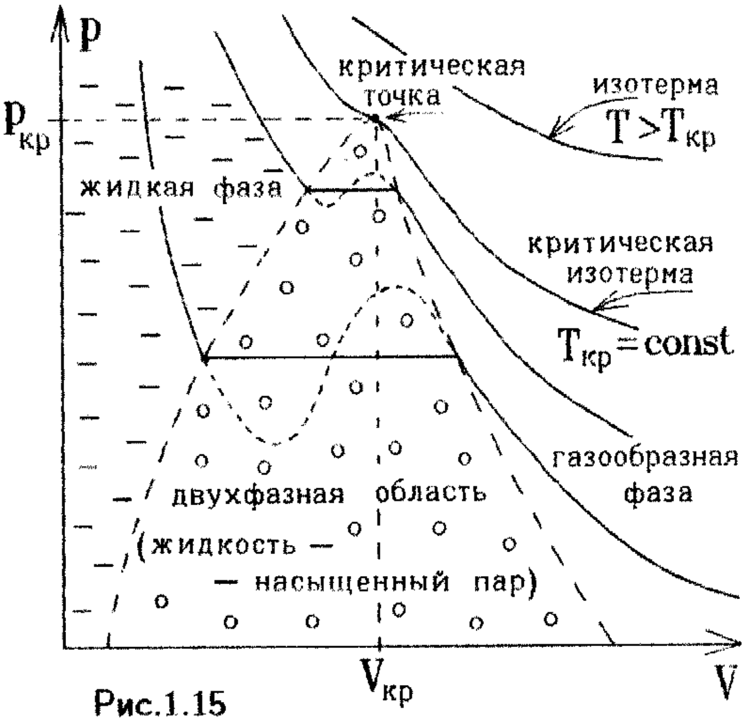

Рис.1.15

$$pV_m = RT + A_1(T)/V_m + A_2(T)/V_m^2 + \cdots,$$

но для практических целей оно мало пригодно, так как требует задания бесконечного числа вириальных коэффициентов $A_i(T)$. Поэтому на практике используют приближенные уравнения, ограничиваясь небольшим числом первых членов разложения.

Наиболее простым, наглядным и поэтому широко известным среди многочисленных приближенных уравнений состояния реального газа является уравнение Ван-дер-Ваальса. Для произвольного числа молей газа ν оно имеет вид

$$(p+\nu^2 a/V^2)\cdot(V-\nu b)=\nu RT\,, \qquad (1.27)$$

где a, b и R – величины, имеющие разные значения для различных газов (первые две называются постоянными Ван-дер-Ваальса). Изотермы, соответствующие уравнению Ван-дер-Ваальса, изображены на рис.1.15. При больших температурах $T > T_{\text{кр}}$ реальный газ незначительно отличается от идеального, и поэтому постоянная R в уравнении (1.27) будет универсальной газовой постоянной. При уменьшении температуры в некоторой критической точке (рис.1.15) теряются различия между свойствами реального газа и жидкости. Этой точке соответствует критическая изотерма $T=T_{\text{кр}}$. Постоянная R из уравнения (1.27) принимает разные значения для различных газов и называется индивидуальной газовой постоянной. Параметры критического состояния связаны с постоянными Ван-дер-Ваальса и индивидуальной постоянной R соотношениями

$$a=3p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}^2\,,\quad b=V_{\text{кр}}/3\,,\quad R=8p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}/(3T_{\text{кр}})\,, \qquad (1.28)$$

где $V_{\text{кр}}$ – критический **молярный** объем. Следует заметить, что поправка b примерно равна учетверенному объему всех молекул в одном моле газа, а R всегда меньше универсальной газовой постоянной.

Задача 5.1

Определить давление, при котором должен находиться 1 кмоль азота, чтобы при $T = 310$ К он занимал объем $2,5$ м^3. Считать азот ван-дер-ваальсовским газом с $p_{\text{кр}} = 3,393$ МПа, $T_{\text{кр}} = 126,0$ К и удельным объемом $V_{0\,\text{кр}} = 3,22\cdot 10^{-3}$ м^3/кг.

Решение

Это – простая задача; нужно только аккуратно вычислить постоянные a, b и R. Для этого сначала найдем $V_{\text{кр}}=\mu V_{0\,\text{кр}}=3,22\cdot 10^{-3}\cdot$ $\cdot 0,028=9,016\cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Затем по формулам (1.28) вычислим постоянные a, b и R :

$$a=0,08274\ \text{Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2\,,\quad b=3,005\cdot 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}\,,$$

$$R=6,474\ \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})\,,\quad (\text{а вовсе не } 8{,}314)\,.$$

Теперь из уравнения (1.27) находим, с учетом того, что $\nu=10^3$ моль,

$$p=\nu RT/(V-\nu b)-\nu^2 a/V^2=7,99\cdot 10^5\ \text{Па}\approx 7,9\ \text{атм}\,.$$

Задача 5.2.

Найти выражения для внутренней энергии и энтропии газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса.

Решение

Прежде всего примем во внимание, что внутренняя энергия любого вещества является функцией, зависящей только от температуры и объема, т.е. $U = U(T, V)$ (попробуйте сами ответить – почему ?).

Так как согласно первому началу термодинамики она является функцией состояния, то dU – полный дифференциал, т.е.

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \cdot dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \cdot dV = \nu C_V \cdot dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \cdot dV\,,$$

поскольку по определению $(\partial U/\partial T)_V = \nu C_V$. Другую частную производную можно вычислить, используя уравнение состояния (в данном случае – уравнение Ван-дер-Ваальса) с помощью формулы (1.26). Так как $p = \nu RT/(V - \nu b) - \nu^2 a/V^2$, то

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{T\nu R}{V - \nu b} - \frac{\nu RT}{V - \nu b} + \frac{\nu^2 a}{V^2} = \frac{\nu^2 a}{V^2}\,.$$

Поэтому $dU = \nu C_V dT + (\nu^2 a/V^2) \cdot dV$ и

$$U = \nu C_V T - \nu^2 a/V\,. \tag{1.29}$$

Постоянная интегрирования в полученном выражении равна нулю, потому что при $V \to \infty$ реальный газ по своим свойствам приближается к идеальному.

Далее согласно первому началу термодинамики

$$\delta Q = dU + pdV = \nu C_V dT + \frac{\nu RT}{V - \nu b} \cdot dV\,.$$

Поэтому $dS = \delta Q/T = \nu C_V \cdot dT/T + \big[\nu R/(V - \nu b)\big] \cdot dV$, откуда

$$\Delta S = \nu C_V \ln(T_2/T_1) + \nu R \ln\big[(V_2 - \nu b)/(V_1 - \nu b)\big]\,. \tag{1.30}$$

Задача 5.3

Два теплоизолированных баллона с объемами $V_2 = V_1 = 1$ л соединены трубкой с краном (рис.1.16). В объеме V_1 находится $\nu = 0{,}042$ моля воздуха при атмосферном давлении и температуре $T = 290$ K, а баллон V_2 откачан до высокого вакуума. Кран открывают, и воздух адиабатически

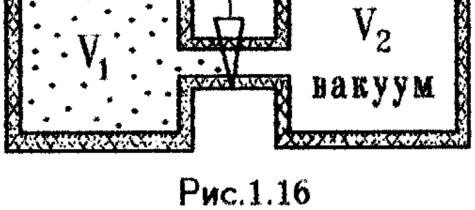

Рис.1.16

расширяется на весь объем. Найти, на сколько при этом изменится температура воздуха. Воздух считать ван-дер-ваальсовским газом с $a = 0,137$ Па · м^6/моль^2.

Решение

В рассматриваемом случае суммарная работа газа над внешними телами равна нулю. А так как баллоны теплоизолированы, т.е. теплообмен отсутствует ($\Delta Q = 0$), то на основании первого начала (1.5)

$$\Delta U = 0 .$$

Согласно формуле (1.29) для ван-дер-ваальсовского газа $U = \nu C_V T - a\nu^2/V$ получим:

$$\Delta T = (a\nu/C_V) \cdot \left[1/(V_1 + V_2) - 1/V_1\right] = -a\nu/2C_V V_1 = -0,14 \text{ K},$$

т.е. газ, расширяясь в вакуум, слабо охлаждается.

Задача 5.4

Для определения постоянных Ван-дер-Ваальса некоторое количество газа, занимающее при температуре $T_1 = 300$ K и давлении $p_1 = 10$ МПа объем $V_1 = 6,79 \cdot 10^{-4}$ м^3, было изотермически сжато до объема $V_2 = 4,00 \cdot 10^{-4}$ м^3, в результате чего давление газа возросло до $p_2 = 16,5$ МПа. Затем газ был охлажден при неизменном объеме до $T_2 = 200$ K, в результате чего давление уменьшилось до $p_3 = 8,19$ МПа. Воспользовавшись этими данными, вычислить значения констант a и b для газа, считая, что R близка к универсальной газовой постоянной. Описанные в условии задачи процессы изображены на рис.1.17.

Решение

Из уравнения (1.27) следует, что для изохорического процесса 2 – 3

$$\frac{p_2 + \nu^2 a/V_2^2}{p_3 + \nu^2 a/V_2^2} = \frac{T_1}{T_2},$$

откуда сразу определяется $\xi = \nu^2 a$:

$$\xi = \frac{T_1 p_3 - T_2 p_2}{T_2 - T_1} \cdot V_2^2 = 1,35 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 .$$

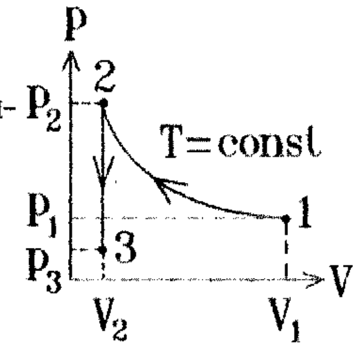

Рис.1.17

Из уравнения изотермы 1 – 2, имеющего для ван-дер-ваальсовского газа вид $(p_1 + \xi/V_1^2) \cdot (V_1 - \beta) = (p_2 + \xi/V_2^2) \cdot (V_2 - \beta)$, находим $\beta = \nu b$:

$$\beta = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1 + \xi(1/V_2 - 1/V_1)}{p_2 - p_1 + \xi(1/V_2^2 - 1/V_1^2)} = 9,96 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 .$$

Из уравнения (1.27) для состояния 2 теперь получим:

$$\nu R = (p_2 + \xi/V_2^2)\cdot(V_2 - \beta)/T_1 = 24,96\ \text{Дж/К}.$$

Полагая $R = 8,314$ Дж/(моль · К), получим $\nu = 3$ моля. Таким образом, искомые постоянные имеют значения:

$$a = \xi/\nu^2 = 0,150\ \text{Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2, \quad b = \beta/\nu = 3,32\cdot 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

Задача 5.5

Непосредственными вычислениями (не используя теорему Карно) найти выражение для к.п.д. обратимого цикла Карно, в котором рабочим телом является 1 моль ван-дер-ваальсовского газа.

Решение

Исходя из первого начала термодинамики, выведем сначала уравнение адиабаты для ван-дер-ваальсовского газа.

Так как для адиабатического процесса $dU + pdV = 0$ и, согласно формуле (1.29) для одного моля $dU = C_V dT + (a/V^2)dV$, то с учетом уравнения состояния (1.2) получаем:

$$C_V dT + \frac{RT}{V-b}dV = 0.$$

Интегрируя это равенство, находим уравнение адиабаты в переменных T, V:

$$T(V-b)^{\gamma-1} = \text{const}. \tag{1.31}$$

Применяя уравнение (1.31) к двум адиабатам в цикле Карно (рис.1.18), получим два соотношения

$$T_1(V_2-b)^{\gamma-1} = T_2(V_3-b)^{\gamma-1},$$
$$T_2(V_4-b)^{\gamma-1} = T_1(V_1-b)^{\gamma-1}.$$

Перемножая их почленно, приходим к условию замкнутости цикла Карно:

$$(V_2-b)(V_4-b) = (V_1-b)(V_3-b). \tag{1.32}$$

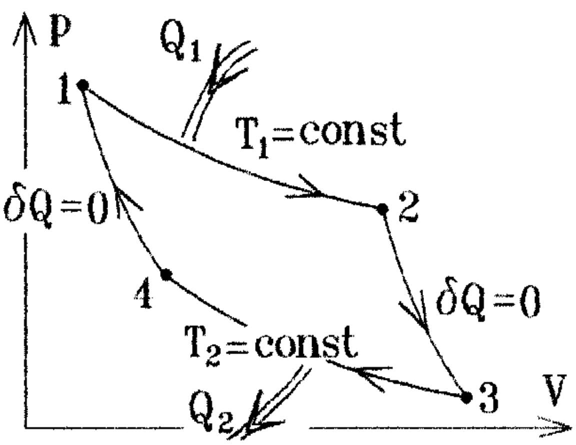

Рис.1.18

Работа при изотермическом расширении одного моля ван-дер-ваальсовского газа

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)dV = RT\ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right) + a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).$$

Теперь вычислим отношение Q_2/Q_1, используя первое начало термодинамики (1.5), формулу для внутренней энергии газа (1.29) и полученное выражение для работы:

$$-\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{U_4-U_3+A_{34}}{U_2-U_1+A_{12}}=$$

$$=\frac{a\left(\frac{1}{V_3}-\frac{1}{V_4}\right)+RT_2\ln\left(\frac{V_4-b}{V_3-b}\right)+a\left(\frac{1}{V_4}-\frac{1}{V_3}\right)}{a\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)+RT_1\ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right)+a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)}=\frac{T_2\ln\left(\frac{V_4-b}{V_3-b}\right)}{T_1\ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right)}.$$

Так как в силу условия (1.32) $(V_4-b)/(V_3-b)=(V_1-b)/(V_2-b)$, то $-Q_2/Q_1=-T_2/T_1$, и к.п.д. обратимого цикла Карно с ван-дер-ваальсовским газом в качестве рабочего тела будет определяться, как

$$\eta=1-Q_2/Q_1=1-T_2/T_1\,.$$

Вообще говоря, этот результат является следствием так называемой первой теоремы Карно:

к.п.д. обратимого цикла Карно с любым рабочим телом равен $1-T_2/T_1$.

6 Жидкости. Капиллярные явления

Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела фаз определяется как

$$\sigma=\frac{\delta A'}{d\Sigma}, \tag{1.33}$$

где $\delta A'$ – работа, совершенная при увеличении площади поверхности раздела фаз на $d\Sigma$. Процесс образования такой поверхности происходит изотермически.

Сила, действующая на участок контура длины dl, ограничивающего поверхность раздела фаз, имеет вид:

$$dF=\sigma dl\,. \tag{1.34}$$

Эта сила направлена перпендикулярно к контуру по касательной к поверхности раздела и стремится сжать её.

Добавочное давление под искривленной поверхностью жидкости (формула Лапласа):

$$\Delta p=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{1.35}$$

где R_1 и R_2 – радиусы главных кривизн поверхности. Так, для сферической поверхности радиуса R в капилляре имеем $R_1=R_2=R$ и $\Delta p=2\sigma/R$.

Задача 6.1

Найти силу притяжения двух параллельных стеклянных пластинок, отстоящих друг от друга на расстояние $h=0{,}1$ мм, после того, как между ними ввели каплю воды с массой $m = 70$ мг. Смачивание считать полным. Для воды $\sigma = 0,073$ Н/м.

Решение

Сначала найдем площадь водяного слоя между пластинками:

$$S = m/\rho h \approx \pi R_2^2 .$$

Вследствие полного смачивания боковая поверхность водяного слоя между пластинками вогнута и имеет радиус кривизны $R_1 = -h/2$ (рис.1.19). Другой главный радиус R_2 боковой поверхности значительно больше: $R_2 = 1,5$ см $\gg R_1$. Поэтому согласно формуле (1.35) давление внутри водяного слоя меньше атмосферного на величину $\Delta p = 2\sigma/h$, и пластинки притягиваются друг к другу с силой

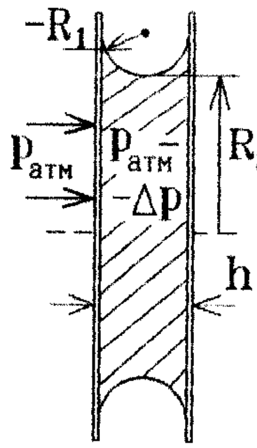

Рис.1.19

$$F = |\Delta p| \cdot S = \frac{2m\sigma}{\rho h^2} = 1{,}02 \text{ Н}.$$

Задача 6.2

В теплоизолированном сосуде находится мыльный пузырь радиуса $r = 2$ см. Масса воздуха внутри пузыря и вне его $m = 12$ г, его температура $T_0 = 300$ К. Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения мыльного раствора имеет вид: $\sigma = \sigma_0 - \alpha T$, где $\sigma_0 = 0,025$ Н/м; $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4}$ Н/(м · К). Определить скрытую теплоту q образования плёнки и найти изменение температуры ΔT воздуха в сосуде после того, как пузырь лопнет.

Решение

Скрытая теплота q образования плёнки – это количество тепла, необходимое для образования единицы площади поверхности раздела двух фаз (в данной задаче – мыльного раствора и воздуха) при постоянной температуре:

$$q = \left(\delta Q / d\Sigma\right)_T . \qquad (1.36)$$

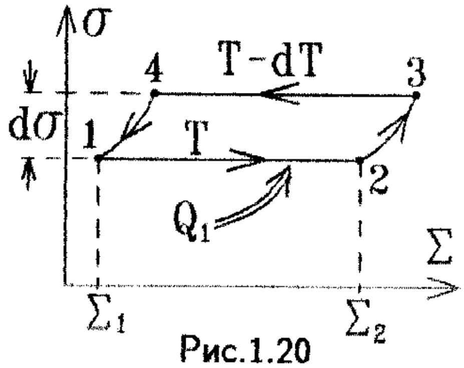

Рис.1.20

Скрытая теплота q зависит только от температуры T и не зависит от величины площади Σ поверхности.

Для вычисления q используем цикл Карно (рис.1.20), в котором при адиабатических процессах $2-3$ и $4-1$ температура меняется на бесконечно малую величину dT. При изотермическом процессе $1-2$ растяжения поверхности раздела Σ коэффициент поверхностного натяжения σ не меняется, и поверхность получает тепло

$$Q_1 = q(\Sigma_2 - \Sigma_1)\,.$$

Работа $\delta A = -\delta A'$, совершаемая поверхностью раздела фаз при её увеличении, отрицательна, а при сжатии — положительна. Пренебрегая работой на участках $2-3$ и $4-1$ (в ходе этих процессов и площадь плёнки, и коэффициент поверхностного натяжения меняются на бесконечно малые величины $d\Sigma$ и $d\sigma$, так что эта работа $\delta A \sim d\sigma d\Sigma$ будет малой высшего порядка), находим согласно (1.33) работу плёнки за цикл (рис.1.20)

$$A = A_{12} + A_{34} = -\sigma(T)(\Sigma_2 - \Sigma_1) + \sigma(T - dT)(\Sigma_2 - \Sigma_1) =$$
$$= -(\Sigma_2 - \Sigma_1)\frac{\partial\sigma}{\partial T}dT\,.$$

Для цикла Карно согласно (1.23)

$$\eta_К = \frac{A}{Q_1} = -\frac{\partial\sigma}{\partial T}\cdot\frac{dT}{q} = 1 - \frac{T - dT}{T}\,,$$

откуда количество тепла, необходимое для образования единицы площади поверхности раздела двух фаз, которое и называется скрытой теплотой образования поверхности,

$$q = -T\frac{\partial\sigma}{\partial T}\,. \qquad (1.37)$$

Плёнка мыльного пузыря имеет две поверхности с площадью $4\pi r^2$ каждая. При исчезновении пузыря тепло, затраченное на образование этой плёнки, выделится и пойдёт на нагревание воздуха в сосуде, т.е. на изменение его внутренней энергии:

$$Q = q\cdot 8\pi r^2 = \Delta U = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T\,.$$

Считая воздух двухатомным газом ($C_V = 5R/2$, $\mu_{возд} =$ $= 29$ г/моль), находим изменение его температуры:

$$\Delta T = -\frac{8\pi r^2\mu}{mC_V}\cdot T\frac{\partial\sigma}{\partial T}\bigg|_{T=T_0} = \frac{16\pi r^2\mu T_0\alpha}{5mR} = 5,26\cdot 10^{-5}\ К\,.$$

Задача 6.3

Дно сосуда имеет отверстие малого диаметра d. Стенки отверстия покрыты тонким слоем парафина, чтобы смачивание отсутствовало. Сосуд заполняют водой на такую максимальную высоту h, чтобы вода не вытекала из отверстия. Капилляр того же диаметра d с абсолютно смачиваемыми стенками выступает на высоту $h/2$ над поверхностью воды (рис.1.21).

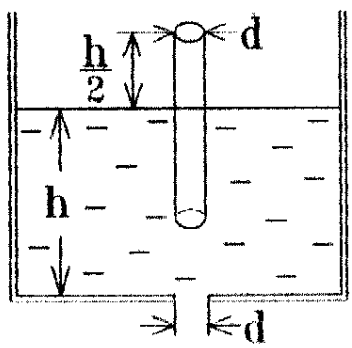

Рис.1.21

Найти угол, образованный поверхностью воды со стенками капилляра.

Решение

По причине полного несмачивания поверхность воды в отверстии принимает вид полусферы диаметра d с поперечным сечением $\pi d^2/4$ (рис.1.22). Вытеканию воды препятствует сила поверхностного натяжения, действующая на круговой контур границы раздела двух сред (вода – парафин) по касательной к поверхности раздела, т.е. вертикально вверх. Согласно (1.34) эта сила имеет величину

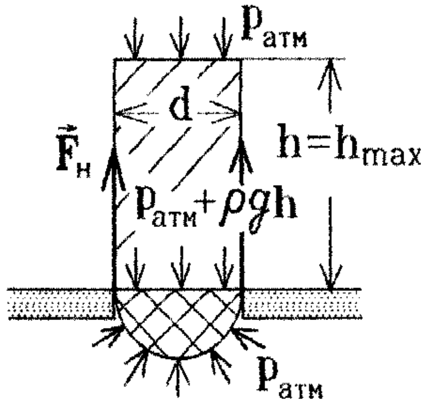

Рис.1.22

$$F_н = \pi d \cdot \sigma,$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения воды.

Капля воды в виде полушария, заштрихованного на рис.1.22, начнёт двигаться вниз, если удерживающая её сила $F_н$ станет ме́ньше результирующей остальных сил, действующих на каплю (силы гидростатического давления $\rho gh \cdot \pi d^2/4$ и пренебрежимо малой по сравнению с ней силы тяжести капли $\rho g \cdot \pi d^3/12$). Условием невытекания капли из отверстия будет

$$F_н \gtrsim \rho gh \cdot \frac{\pi d^2}{4}, \text{ откуда } h_{max} = \frac{4\sigma}{\rho gd}.$$

При полном смачивании стенок капилляра поверхность воды в нём стремится образовать вогнутую полусферическую поверхность радиуса $d/2$ (рис. 1.23). Давление воды под этой поверхностью согласно формуле (1.35) где $R_1 = R_2 = d/2$, уменьшается на величину $\Delta p = 4\sigma/d$. Столб воды в капилляре поднимется на такую высоту, чтобы скомпенсировать изменение этого давления на уровне поверхности воды в сосуде: $\rho gh - \Delta p = 0$, т.е. вода может подняться в капилляре до высоты $h = \Delta p/(\rho g) = 4\sigma/(\rho gd)$. Но если капилляр поднят над поверхностью жидкости на ме́ньшую высоту $h/2$, то это не означает, что вода начнёт переливаться через верхние стенки капилляра и падать вниз (такая система была бы вечным двигателем первого рода !). Вода поднимется до верхней точки стенок капилляра, образуя вогнутую поверхность бо́льшего радиуса R (рис.1.23) так, что

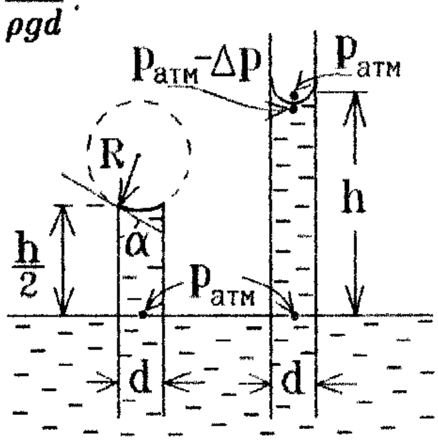

Рис.1.23

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{\rho g h}{2} \quad \text{или} \quad R = \frac{4\sigma}{\rho g h} = d\,.$$

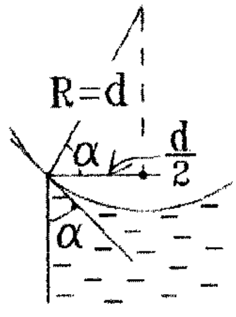

Рис.1.24

Из капилляра при этом вода не выльется. (Точно так же при меньшей высоте уровня воды в сосуде $h < h_{max}$ поверхность капли на рис.1.22 будет иметь радиус кривизны $r > d/2$, и сила натяжения $\vec{F}_н$ будет направлена под углом к вертикали.)

Простые геометрические соотношения (рис.1.24) позволяют вычислить угол между стенкой капилляра и поверхностью воды:

$$d/2 = R\cos\alpha \quad \text{или} \quad \alpha = \arccos(1/2) = 60^\circ\,.$$

Задача 6.4

Вода, налитая в сосуд до высоты $h = 1$ м, вытекает через капилляр длины $l = 5$ см со скоростью одна капля в секунду (рис.1.25). Найти радиус капилляра r, считая, что в момент отрыва капля имеет практически сферическую форму.

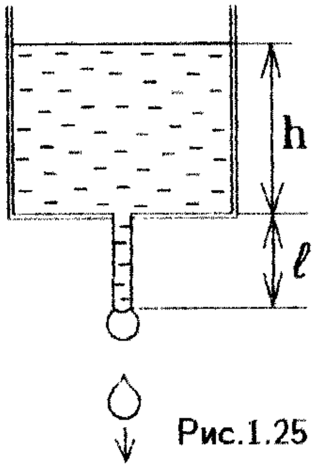

Рис.1.25

Решение

В момент отрыва сила тяжести капли уравновешена силой поверхностного натяжения, действующей на круговой контур с радиусом, равным радиусу капилляра (рис.1.26):

$$F_н = 2\pi r\sigma = \rho g\cdot(4\pi R^3/3)\,,$$

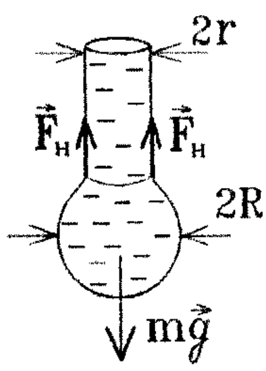

Рис.1.26

где R – радиус капли, $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность, $\sigma = 0,073$ Н/м – коэффициент поверхностного натяжения воды. За время $t = 1$ с из капилляра вытекает объём жидкости, равный объёму одной капли. Формула Пуазейля (3.42) связывает этот объём с разностью давлений Δp на противоположных концах капилляра:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\pi r\sigma}{\rho g} = \frac{\pi\Delta p r^4}{8\eta l}\,t\,,$$

где $\eta = 0,01$ Па·с – коэффициент динамической вязкости воды.

Пренебрегая добавочным давлением воды вблизи нижнего конца капилляра, которое возникает из-за искривления поверхности жидкости, считаем, что $\Delta p = \rho g h$. Это справедливо при $\rho g h \gg 2\sigma/r$ или

$$r \gg 2\sigma/(\rho g h) = 0,015 \text{ мм}\,. \tag{1.38}$$

Тогда

$$r = \sqrt[3]{16\sigma\eta l/(\rho^2 g^2 h t)} \approx 0,230 \text{ мм}\,.$$

Полученная величина согласуется с принятым допущением (1.38).

Используя формулу Пуазейля (3.42), мы пренебрегли силой тяжести, действующей на столб воды в капилляре. Это оправдано, поскольку $l \ll h$.

Задача 6.5

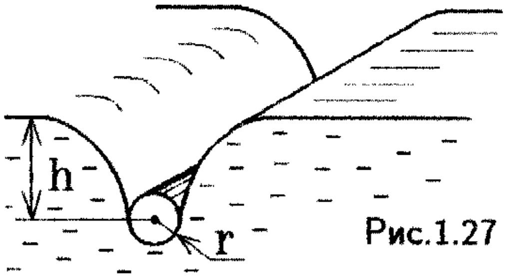

Рис.1.27

Длинную тонкую стальную проволочку, покрытую тончайшим слоем парафина, осторожно положили на поверхность воды. Проволочка погрузилась в воду, но не утонула, а осталась плавать. Найти радиус проволочки и глубину h погружения её оси при условии, что вода касается только половины боковой поверхности проволочки (рис.1.27). Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0{,}073$ Н/м, плотность стали $\rho_c = 7800$ кг/м^3, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Решение

Рассмотрим произвольную точку A, в которой искривлённая поверхность воды наклонена под углом φ к горизонту (рис.1.28). Согласно формуле Лапласа (1.35) под поверхностью воды в этом месте будет создаваться избыточное давление $\Delta p = \sigma/R$, где R – радиус кривизны поверхности. (Второй главный радиус кривизны для очень длинной проволочки будет бесконечно большим.)

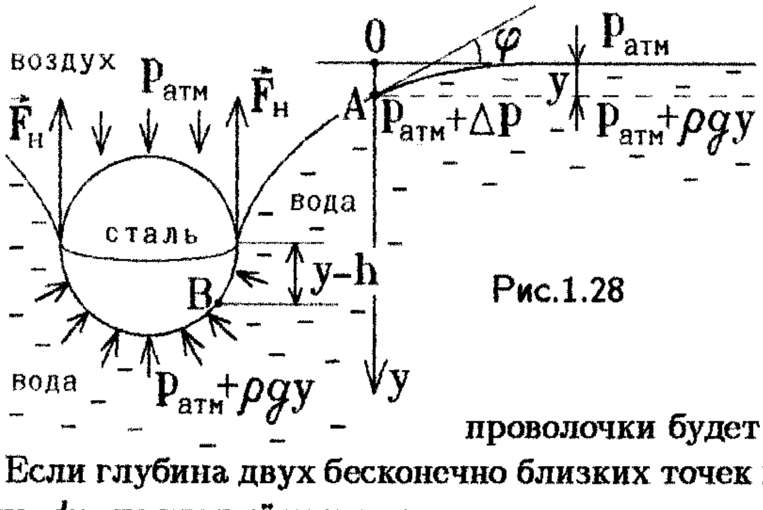

Рис.1.28

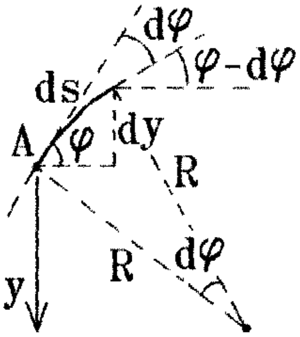

Рис.1.29

Если глубина двух бесконечно близких точек поверхности отличается на dy, то угол её наклона в этих точках изменяется на $d\varphi$ (рис.1.29). Длина дуги ds между этими точками, с одной стороны, может быть выражена через центральный угол: $ds = R d\varphi$, а, с другой, как следует из геометрических соображений, $ds = dy/\sin\varphi$ (с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Отсюда находим:

$$R = \frac{dy}{\sin\varphi \cdot d\varphi}.$$

Приравнивая давление Δp гидростатическому давлению $\rho g y$ под плоской поверхностью жидкости на том же горизонтальном уровне (рис.1.28),

$$\Delta p = \rho g y = \sigma / R = \sigma \sin\varphi\, d\varphi / dy\,,$$

приходим к уравнению, определяющему форму поверхности жидкости вблизи плавающей проволочки, которое можно проинтегрировать:

$$\int_0^h \rho g y dy = \int_0^{\pi/2} \sigma \sin\varphi\, d\varphi\,.$$

Отсюда находим глубину погружения оси проволочки:

$$h = \sqrt{2\sigma/(\rho g)} = 3,86 \text{ мм}\,.$$

Теперь рассмотрим силы, действующие на проволочку. Хотя произвольная точка B на её поверхности погружена в воду на глубину $(y-h)$, как показано на рис.1.28, тем не менее, давление, оказываемое на эту точку со стороны воды, превышает атмосферное давление на величину $\rho g y$.

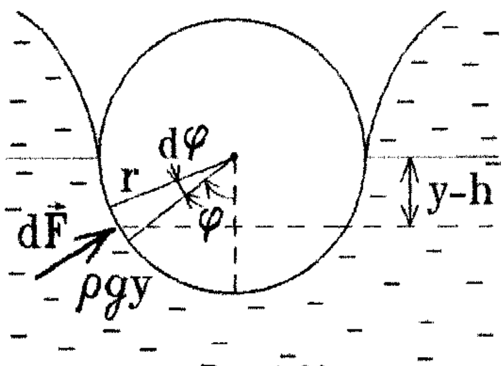

Рис.1.30

Результирующую силу этого гидростатического давления найдём, разбивая поверхность цилиндра на узкие полоски длины l и ширины $r d\varphi$, как показано на рис.1.30. На каждую такую полоску действует сила $dF = \rho g y \cdot l r d\varphi$, а результирующая этих сил направлена вертикально вверх и имеет величину

$$F_{\text{давл}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dF \cdot \cos\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho g l r\,(h + r\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = \rho g \left(2rh + \pi r^2/2\right) l\,.$$

Это выражение является ни чем иным, как весом слоя воды с поперечным сечением $2rl$, вытесненным плавающей проволочкой, т.е. силой Архимеда.

Не даёт утонуть плавающей проволочке также сила поверхностного натяжения $F_{\text{н}}$, стремящаяся сократить искривлённую поверхность воды и действующая на контур раздела трёх сред (сталь – воздух – вода) по касательной к поверхности воды, т.е. вертикально вверх (рис.1.28). Величину такой силы находим из формулы (1.34): $F_{\text{н}} = 2l\sigma$.

Две направленные вверх силы уравновешивают силу тяжести проволочки:

$$F_{\text{давл}} + F_{\text{н}} = mg = \rho_C g \pi r^2 l\,,$$

откуда получаем квадратное уравнение для определения радиуса r:

$$\pi g\left(\rho_c - \frac{\rho}{2}\right)r^2 - 2\rho g h r - 2\sigma = 0\,.$$

После подстановки чисел находим его решение: $r = 0,992$ мм.

7 Фазовые превращения

Фазовые превращения – это переходы вещества из одной фазы в другую (например, переход газа в жидкость, жидкости - в твердое тело, переход металла из ферромагнитного состояния в парамагнитное, из сверхпроводящего - в несверхпроводящее и т.д.)

Если плотность и термодинамические функции (внутренняя энергия, энтропия и другие) изменяются в точке перехода скачком, то такое превращение называется фазовым переходом первого рода. К таковым, в частности, относятся все изменения агрегатного состояния вещества и переходы одних кристаллических модификаций в другие.

Они характеризуются отличной от нуля теплотой фазового превращения, измеряемой при постоянных температуре и давлении. При изменении давления меняется также температура перехода (и обратно).

При равновесии двух фаз изменение давления и температуры системы связаны уравнением Клапейрона – Клаузиуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)}\,, \tag{1.39}$$

где q – удельная теплота, поглощаемая при переходе $1 \to 2$, v_1 и v_2 – удельные объемы фаз 1 и 2 соответственно.

Вблизи сферической искривленной поверхности жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ давление изменяется на величину

$$\Delta p = \frac{2\sigma\rho_{\text{п}}}{r\,(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}})} \qquad \text{(формула Томсона)}\,, \tag{1.40}$$

где r – радиус кривизны поверхности, $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости, $\rho_{\text{п}}$ – плотность насыщенного пара вблизи плоской поверхности жидкости. Рядом с вогнутой поверхностью жидкости это давление уменьшается, а вблизи выпуклой поверхности – растёт.

Задача 7.1

Температура льда на катке -1 °C. На льду неподвижно стоит фигурист на коньках с остро заточенными лезвиями. **Реальная** площадь соприкосновения каждого конька со льдом $S = 25$ мм^2. При какой массе фигуриста лёд под коньками начнет плавиться ?

Решение

Вес фигуриста создаёт дополнительное к атмосферному давление $\Delta p = mg/(2S)$. С учетом уравнения Клапейрона–Клаузиуса (1.39)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T\,(v_\text{в} - v_\text{л})}, \tag{1.41}$$

где удельная теплота плавления льда при давлении $p_0 = 1$ атм и температуре $T_0 = 273$ К имеет величину $q = 333$ кДж/кг. Здесь $v_\text{в} = 1/\rho_\text{в}$ и $v_\text{л} = 1/\rho_\text{л}$ – удельные объемы воды и льда. При повышении давления на лед температура плавления льда понижается, так как плотность льда $\rho_\text{л} = 916$ кг/м^3 меньше, чем у воды ($\rho_\text{в} = 10^3$ кг/м^3), и поэтому правая часть уравнения (1.41) отрицательна.

Разделяя переменные в уравнении (1.41) и интегрируя,

$$\int\limits_{p_0}^{p_0+\Delta p} dp = \int\limits_{T_0}^{T_0+\Delta T} \frac{q\,dT}{T\,(v_\text{в} - v_\text{л})}, \quad \text{получим } \Delta p = \frac{q}{v_\text{в} - v_\text{л}} \ln\left(\frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\right).$$

Следовательно, для понижения температуры плавления льда на $\Delta T = -1$ К масса фигуриста должна превысить величину

$$m \geqslant \frac{\Delta p \cdot 2S}{g} = \frac{q}{(1/\rho_\text{в}) - (1/\rho_\text{л})} \cdot \frac{2S}{g} \ln\left(\frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\right) = 68 \text{ кг}.$$

Задача 7.2

Считая атмосферу равновесной и имеющей температуру $T_\text{а} = 293$ К, определить температуру кипения воды на крыше небоскрёба высоты $h = 500$ м. При каком давлении вода начнёт кипеть при температуре $T_\text{а}$? Удельная теплота парообразования воды уменьшается с ростом температуры по приближенному закону $q = q_0 - \alpha\,(T - T_0)$, где $T_0 = 373$ К, $q_0 = 2257$ кДж/кг, $\alpha = 2{,}7$ кДж/(К · кг) [7, с.171].

Решение

Пар, образующийся при температуре кипения T, можно считать идеальным газом с плотностью, вычисляемой по формуле (1.2): $\rho_\text{п} = p\mu_\text{п}/(RT)$, где $\mu_\text{п} = 18$ г/моль. Его удельный объём $v_\text{п} = 1/\rho_\text{п} = RT/(p\mu_\text{п})$ намного превышает удельный объём воды $v_\text{в} = 1/\rho_\text{в} = 10^{-3}$ м^3/кг. Поэтому уравнение Клапейрона–Клаузиуса (1.39) запишется в виде:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{Tv_\text{п}} = \frac{q_0 - \alpha\,(T - T_0)}{RT^2}\,p\mu_\text{п}. \tag{1.42}$$

Интегрируя это уравнение, получаем зависимость температуры кипения воды от давления p насыщенного пара. В точке кипения это давление совпадает с давлением окружающей атмосферы. При давлении $p_0 = 1$ атм вода кипит при температуре $T_0 = 373$ К, т.е.

$$\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=\int\limits_{T_0}^{T}\frac{q_0-\alpha(T-T_0)}{RT^2}\mu_{\text{п}}dT\,,$$

откуда

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)=\frac{\mu_{\text{п}}}{R}\left[(q_0+\alpha T_0)\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)-\alpha\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right].$$

Чтобы вода кипела при температуре +20 °C ($T=T_{\text{а}}$), давление должно уменьшиться до величины

$$p=p_0\exp\left[\frac{\mu_{\text{п}}(q_0+\alpha T_0)}{R}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_{\text{а}}}\right)-\frac{\alpha\mu_{\text{п}}}{R}\ln\left(\frac{T_{\text{а}}}{T_0}\right)\right]=0,0232\ \text{атм}\,.$$

Если небоскрёб построен на уровне моря, то согласно барометрической формуле (1.14) давление на высоте его крыши падает незначительно: $p(h)=p_0\exp\left(-\mu_{\text{возд}}gh\big/RT_{\text{а}}\right)$, где $\mu_{\text{возд}}=29$ г/моль. Поэтому температура кипения меняется мало, и уравнение (1.42) можно приближенно записать в виде

$$\frac{dp}{dT}=\frac{q_0}{Tv_{\text{п}}}=\frac{q_0p\mu_{\text{п}}}{RT^2}\,.$$

Тогда

$$\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=\int\limits_{T_0}^{T}\frac{q_0\mu_{\text{п}}dT}{RT^2}\quad\text{или}\quad\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)=-\frac{\mu_{\text{возд}}gh}{RT_{\text{а}}}=\frac{q_0\mu_{\text{п}}}{R}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right),$$

откуда находим, что температура кипения на высоте $h=500$ м

$$T=\left(\frac{\mu_{\text{возд}}gh}{\mu_{\text{п}}q_0T_{\text{а}}}+\frac{1}{T_0}\right)^{-1}\approx 371,34\ \text{К}\,,\ \text{т.е. уменьшается на}\ 1,66\ \text{К}\,.$$

Задача 7.3

В изолированной комнате находился при температуре 27 °C воздух с относительной влажностью 100%. Давление насыщенного водяного пара при такой температуре $p_0=3560$ Па. Какая масса воды выделится в виде влаги при понижении температуры комнаты на 10 °C ? Объём комнаты $V=50$ м^3, а удельную теплоту парообразования q в рассматриваемом интервале температур можно считать постоянной и равной 2450 кДж/кг.

Решение

Подставляем в уравнение Клапейрона–Клаузиуса (1.39) удельный объём пара $v_{\text{п}}=1/\rho_{\text{п}}=RT/p\mu_{\text{п}}$. Его давление p при относительной влажности 100% совпадает с давлением насыщенного пара. Удельным объёмом воды $v_{\text{в}}=1/\rho_{\text{в}}\ll v_{\text{п}}$ можно пренебречь, поэтому

$$\frac{dp}{dT}=\frac{q}{T(v_{\text{п}}-v_{\text{в}})}\approx\frac{qp\mu_{\text{п}}}{RT^2}\,.\qquad(1.43)$$

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя его

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{q_0\mu_п}{R} \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T^2}, \quad \text{находим} \quad p = p_0 \exp\left[\frac{q_0\mu_п}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right]. \qquad (1.44)$$

При охлаждении пар по-прежнему подчиняется уравнению состояния идеального газа, когда его параметры достаточно далеки от критических, и остаётся насыщенным. Зависимость давления насыщенного пара от температуры T в небольшом интервале изменения температур $T_0 - T \ll T - T_{крит}$ хорошо описывается полученной формулой (1.44).

Масса конденсирующейся влаги равна изменению массы насыщенного водяного пара в комнате:

$$\Delta m = \frac{p_0 V \mu_п}{RT_0} - \frac{pV\mu_п}{RT} = \frac{p_0 V \mu_п}{R}\left\{\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\exp\left[\frac{q\mu_п}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right]\right\} =$$
$$= 0,562\ кг.$$

Задача 7.4

На дне сосуда с идеально гладкими стенками лежит мелкий песок с максимальным радиусом песчинок $r = 10$ мкм. При какой температуре будет закипать вода вблизи дна сосуда, если высота верхнего уровня воды $h = 20$ см ? При давлении $p_0 = 1$ атм и температуре $T_0 = 373$ К удельная теплота парообразования воды $q = 2257$ кДж/кг, а коэффициент поверхностного натяжения воды при этой температуре $\sigma = 0,0588$ Н/м.

Решение

Вследствие наличия гидростатического давления вода на дне сосуда должна закипать при давлении $p = p_0 + \rho_в gh$, где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, и согласно уравнению Клапейрона–Клаузиуса (1.39) при температуре $T_К > T_0$. Так как удельный объём образующегося пара $v_п = 1/\rho_п = RT/(p\mu_п)$, где $\mu_п = 0,018$ кг/моль значительно превышает удельный объём воды: $v_в = 1/\rho_в \ll v_п$, то уравнение (1.39) запишется в виде

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{Tv_п} = \frac{qp\mu_п}{RT^2}. \qquad (1.45)$$

Разделяя переменные, интегрируя и учитывая, что $\rho_в gh \ll p_0$, находим температуру кипения воды у дна сосуда:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{q\mu_п}{R} \int_{T_0}^{T_К} \frac{dT}{T^2}, \quad \text{откуда}$$

$$T_К = \left[\frac{1}{T_0} - \frac{R}{q\mu_п}\ln\left(1 + \frac{\rho_в gh}{p_0}\right)\right]^{-1} \approx \left(\frac{1}{T_0} - \frac{R\rho_в gh}{q\mu_п p_0}\right)^{-1} = 373,552\ К.$$

В момент закипания воды при температуре $T_К$ и давлении $p =$

$= p_0 + \rho_{\text{в}} g h$ должны образовываться крохотные пузырьки насыщенного пара, причем давление насыщенного пара в точке кипения равно давлению жидкости p. Учтём, что внутри пузырька радиуса r, где поверхность жидкой фазы вогнута согласно формуле (1.40) давление насыщенного пара должно уменьшиться на величину $\Delta p = 2\sigma\rho_{\text{п}}/r\rho_{\text{в}}$, т.е. $p_{\text{н}} = p - \Delta p$. Пар оказывается перенасыщенным и немедленно конденсируется на стенке пузырька, который исчезает. Поэтому пузырьки пара в момент закипания образуются только на песчинках и мелких неоднородностях стенок и дна сосуда.

Жидкость при этом должна быть немного перегрета: согласно уравнению (1.45) с ростом её температуры до значения $T_{\text{К}}+\Delta T$ давление $p_{\text{н}}$ образующегося внутри пузырька насыщенного пара также возрастает, и, как только оно сравняется с давлением жидкости p, пар перестаёт быть перенасыщенным, и пузырёк начнёт расти.

Интегрируя (1.45) с учётом $\Delta p = 2\sigma\rho_{\text{п}}/r\rho_{\text{в}} \approx 2\sigma p\mu_{\text{п}}/RT_0 r\rho_{\text{в}} \ll p$, получаем условие появления неисчезающих пузырьков пара:

$$\int\limits_{p-\Delta p}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{q\mu_{\text{п}}}{R} \int\limits_{T_{\text{К}}}^{T_{\text{К}}+\Delta T} \frac{dT}{T^2}, \text{ откуда } \frac{1}{T_{\text{К}}} - \frac{1}{T_{\text{К}}+\Delta T} \approx \frac{\Delta T}{T_{\text{К}}^2} \approx \frac{\Delta T}{T_0^2} =$$

$$= \frac{R}{q\mu_{\text{п}}} \ln\left(\frac{p}{p-\Delta p}\right) \approx \frac{R}{q\mu_{\text{п}}} \ln\left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right) \approx \frac{R}{q\mu_{\text{п}}} \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{2\sigma}{qT_0 r\rho_{\text{в}}}$$

$$\text{и} \quad \Delta T = \frac{2\sigma T_0}{qr\rho_{\text{в}}} = 1,94 \cdot 10^{-2}\ \text{К}.$$

Видно, что пузырьки пара начнут возникать в первую очередь на песчинках самого большого размера r. Температура закипания на дне сосуда превысит $T_0 = 373$ К на $T_{\text{К}} + \Delta T - T_0 = 0,572$ К.

Задача 7.5

Вода, лёд и водяной пар находились одновременно в равновесном устойчивом состоянии (тройная точка). Температуру начинают медленно уменьшать до $0\,^\circ$C, а давление повышают до атмосферного $p_0 = 1$ атм $= 1,013 \cdot 10^5$ Па. Найти температуру тройной точки воды, если при температуре $0\,^\circ$C и атмосферном давлении удельная теплота плавления льда $q_{\text{л}} = 333$ кДж/кг, удельная теплота парообразования воды $q_{\text{п}} = 2501$ кДж/кг, давление насыщенного водяного пара $p_{\text{п}} = 610,6$ Па, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 916$ кг/м^3, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/м^3. Каким должен быть минимальный радиус центров конденсации (пылинок), чтобы появился туман?

Решение

Вода является аномальным веществом, так как при повышении давления температура плавления льда уменьшается (задача 7.1). Кривая равновесия фаз "лёд – вода" на диаграмме состояний (рис.1.31) имеет отрицательный наклон к оси T, и из уравнения Клапейрона – Клаузиуса (1.39) следует, что

$$-\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{л-в}} \approx \frac{p_0 - p_{\text{т}}}{T_{\text{т}} - T_0} \approx$$

$$\approx \frac{q_{\text{л}}}{T_0\left(\rho_{\text{л}}^{-1} - \rho_{\text{в}}^{-1}\right)} = 13,3\ \frac{\text{МПа}}{\text{К}}, \quad (1.46)$$

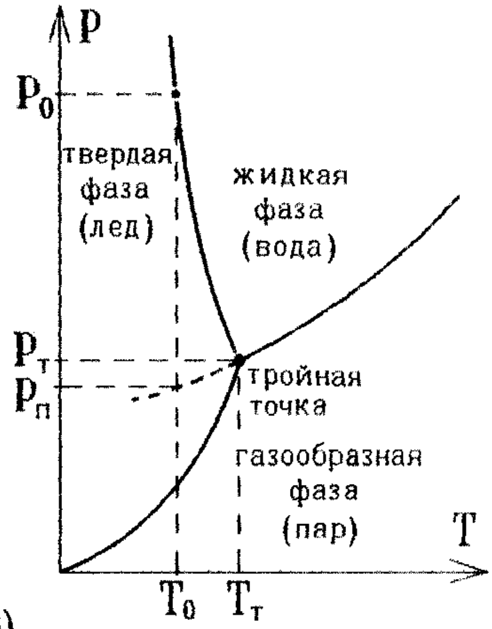

Рис.1.31

где $p_{\text{т}}$ – давление в тройной точке, $T_0 = 273$ К.

Давление насыщенного водяного пара растёт при повышении температуры (кривая равновесия фаз "вода – пар" на рис.1.31). Уравнение Клапейрона – Клаузиуса для этой кривой имеет вид (1.43) или

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{в-п}} \approx \frac{p_{\text{т}} - p_{\text{п}}}{T_{\text{т}} - T_0} \approx \frac{q_{\text{п}}\rho_{\text{п}}\mu_{\text{п}}}{RT_0^2} = 44,4\ \text{Па/К}. \quad (1.47)$$

Заметим, что ниже тройной точки $T_{\text{т}}$ устойчивого равновесия между паром и водой не существует. Состояние "вода – пар" при 0 °C метастабильно (переохлаждённая жидкость). Поэтому кривая раздела фаз в этой области показана на рис.1.31 штриховой линией.

Решая совместно уравнения (1.46) и (1.47), находим температуру и давление в тройной точке воды:

$$T_{\text{т}} - T_0 = \frac{p_0 - p_{\text{п}}}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{в-п}} - \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{л-в}}} = 7,57 \cdot 10^{-3}\ \text{К},$$

$$p_{\text{т}} - p_{\text{п}} = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{в-п}} (T_{\text{т}} - T_0) = 0,336\ \text{Па}.$$

Температура в тройной точке очень незначительно превышает 0 °C. Давление системы в этой точке $p_{\text{т}} \approx p_{\text{п}}$ значительно меньше атмосферного.

При охлаждении из тройной точки пар конденсируется в крошечные капельки радиуса r (туман). Однако, вблизи выпуклой поверхности капельки давление насыщенного пара согласно формуле Томсона (1.40) возрастает на $\Delta p = 2\sigma\rho_п/r\rho_в \approx 2\sigma\rho_п\mu_п/(RT_0r\rho_в)$, и пар, образовавшийся при давлении $p = p_т$, вблизи капельки будет ненасыщенным. В результате капелька немедленно испарится. Чтобы этого не произошло, пар вокруг капельки должен быть переохлаждённым. Так как его давление при этом не изменится, то при температуре $T_0 < T_т$ (рис.1.31) он окажется перенасыщенным, и при наличии центров конденсации (пылинок, микроорганизмов и т.п.) с радиусом r, удовлетворяющим условию

$$p_т \geqslant p_п + \Delta p = p_п + 2\sigma\rho_п\mu_п\big/(RT_0r\rho_в),$$

он будет перенасыщенным даже вблизи выпуклой поверхности водяной плёнки, образующейся на центрах конденсации. Конденсация продолжается, и капельки тумана будут расти. Таким образом, капельки тумана образуются при

$$r \geqslant \frac{2\sigma\rho_п\mu_п}{(p_т - p_п)RT_0\rho_в} = 2,18 \text{ мкм}.$$

Задача 7.6

Один моль воды, находившийся в равновесии с пренебрежимо малым количеством насыщенного пара при температуре $T_1 = 273$ K, перевели целиком в насыщенный пар при температуре $T_2 = 293$ K. Найти приращение энтропии системы. Пар считать идеальным газом, удельным объёмом жидкости пренебречь по сравнению с удельным объёмом пара, удельную теплоту парообразования воды q в рассматриваемом интервале температур принять постоянной и равной 2477 кДж/кг. Какая масса воды конденсируется при дальнейшем изохорическом охлаждении пара до первоначальной температуры T_1 ?

Решение

Плоский участок изотермы на диаграмме состояний рис.1.15 соответствует фазовому переходу процесса испарения или конденсации в двухфазной системе "вода – пар". В данной задаче начальным является состояние 1, а конечным – состояние 2, когда вся вода переведена в насыщенный пар (рис.1.32).

Рис.1.32

Изменение энтропии не зависит от пути перехода. Рассмотрим путь $1 \to 1' \to 2$, в котором вода сначала испаряется при неизменной температуре T_1, а затем насыщенный пар нагревается до температуры T_2. Так как по условию пар можно считать идеальным газом, то изменение его энтропии выражается формулой (1.17), и в результате

$$\Delta S_{12} = \Delta S_{11'} + \Delta S_{1'2} = \frac{q\mu}{T_1} + C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \qquad (1.48)$$

Зависимость давления насыщенного пара от его температуры определяется из уравнения Клапейрона–Клаузиуса (1.39), которое при сделанных предположениях принимает вид (1.43). Вычисляя интеграл, получим, аналогично (1.44),

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{q\mu}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

и после подстановки в (1.44), с учётом $C_p = (i+2)R/2$, находим:

$$\Delta S_{12} = 4R\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{q\mu}{RT_2} = 20,7 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}.$$

После изохорического охлаждения часть насыщенного пара, имевшего объём V_2 (рис.1.32), конденсируется. Используя уравнение состояния (1.2), находим массу насыщенного пара в точках 2 и $2'$:

$$m = \mu \cdot 1\,\text{моль} = \rho_{\text{пара}} \cdot V_2 = \mu p_2 V_2/(RT_2)\,; \quad m' = \mu p_1 V_2/(RT_1)\,.$$

Отсюда получаем, что масса сконденсировавшейся воды

$$\Delta m = m - m' = m\left(1 - \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}\right) =$$

$$= \mu \cdot 1\,\text{моль} \cdot \left\{1 - \frac{T_2}{T_1}\exp\left[\frac{q\mu}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right]\right\} = 12,9 \text{ г}.$$

Глава 2.

Задачи по термодинамике для самостоятельного решения

Уравнение состояния идеального газа

1-1. Для некоторого количества идеального газа $(\partial p/\partial T)_V = \alpha = 2$ Па/К, $(\partial V/\partial p)_T = \beta = -3$ м^3/Па. Выразить величину $(\partial T/\partial V)_p$ через величины α и β и вычислить ее.

Ответ: $0,167$ К/м^3.

1-2. Баллон вместимостью 30 л разделен на три равные части пористыми перегородками. В левую часть – (1) вводят 30 г водорода, в среднюю – (2) — 160 г кислорода, в правую – (3) — 70 г азота. Через левую перегородку может диффундировать только водород, через правую – водород и азот. Какие давления установятся в каждой части баллона, если он поддерживается при температуре 300 К ?

Ответ: $p_1 \simeq 1,25$ МПа, $p_2 \simeq 2,81$ МПа, $p_3 \simeq 1,56$ МПа.

1-3. Вычислить молярную массу воздуха, считая, что он состоит в основном из кислорода (27%) и азота (73%), а остальные газы являются незначительными примесями.

Ответ: $29,0$ г/моль.

1-4. Барометрическая трубка погружена в глубокий сосуд со ртутью так, что уровни ртути в трубке и в сосуде совпадают. При этом длина столба воздуха в трубке 20 см. На сколько поднимется уровень ртути в трубке, если саму трубку поднять на 5 см ? Атмосферное давление равно 75 см рт.ст.

Ответ: на $3,9$ см.

1-5. В цилиндрическом сосуде с хорошо проводящими тепло стенками, изображенном на рис.2.1, обе части заполнены воздухом. Длина пружины жесткости $k = 9$ кН/м в недеформированном состоянии равна $l/2$, где $l = 80$ см – длина всего сосуда. При этом давление в правой части сосуда будет равно атмосферному $p_0 = 1$ атм. В левую часть накачивают воздух до тех пор, пока поршень не окажется на расстоянии $x_1 = l/6$ от правой стенки, после чего из-за наличия очень маленького отверстия в левой части, воздух из нее начинает медленно (изотермически) вытекать при комнатной температуре $T = 300$ К. Какая масса воздуха вытечет из левой части сосуда к тому моменту, когда поршень сместится на расстояние $\Delta x = l/6$? Площадь поперечного сечения сосуда $S = 100$ см^2.

Ответ: $\Delta m = \dfrac{\mu l}{2RT}\left(3p_0 S + \dfrac{kl}{3}\right) = 25,3$ г.

1-6. Цилиндрическая пипетка длиной 24 см наполовину погружена в ртуть. Ее закрывают пальцем и вынимают. Какой длины столбик ртути останется в пипетке, если атмосферное давление равно 76 см рт.ст. ?

Ответ: 10,15 см.

1-7. Узкая цилиндрическая трубка, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути. Когда трубка обращена закрытым концом вверх, воздух внутри нее занимает длину l; когда же трубка обращена вверх открытым концом – длина столбика воздуха в ней $l' < l$. При этом длина столбика ртути не меняется и равна h мм. Найти атмосферное давление.

Ответ: $p_{\text{атм}} = h(l + l')\big/(l - l')$ мм рт.ст.

1-8. Найти максимально возможную температуру идеального газа в двух процессах: а) $p = p_0 - \alpha V^2$, б) $p = p_0 \cdot \exp(-\beta V)$, где p_0, α и β – положительные постоянные, а V – объем одного моля газа.

Ответ: а) $T_{\max} = (2p_0/3R)\sqrt{p_0/3\alpha}$, б) $T_{\max} = p_0/(\beta e R)$, где $e = 2,718$.

1-9. Изобразить на диаграмме $p - V$ примерный график процесса, происходящего в идеальном газе по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α – положительные постоянные. Найти наименьшее возможное давление газа в этом процессе.

Ответ: $p_{\min} = 2\nu R\sqrt{\alpha T_0}$.

1-10. Скорость откачки вращающегося масляного насоса $k = dV/dt$ постоянна и равна 150 см^3/с. Сколько потребуется времени, чтобы колбу объемом 5 л откачать от нормального атмосферного давления до 0,01 мм рт.ст. ?

Ответ: $\tau \approx 6$ мин 15 с.

1-11. Два одинаковых баллона соединены трубкой с клапаном, пропускающим газ из одного баллона в другой при разности давлений, большей, чем $\Delta p = 1,10$ атм. Сначала в одном баллоне был вакуум, а в другом – идеальный газ при температуре $t_1 = 27\,°$C и давлении $p_1 = 1,00$ атм. Затем оба баллона нагрели до температуры $t_2 = 107°$ C. Каким стало давление в баллоне, где прежде был вакуум ?

Ответ: $p_2{}' = 0,5(T_2p_1/T_1 - \Delta p) = 0,083$ атм.

1-12. Предположим, что планету массы $M = 6,2\cdot 10^{24}$ кг и радиуса $r = 6400$ км окружает атмосфера постоянной плотности, состоящая из газа с молярной массой $\mu = 30$ г/моль. Найти температуру на поверхности планеты, зная, что толщина атмосферы $h = 8,314$ км.

Ответ: $T = \mu GMh/Rr^2 = 303$ K
(G – гравитационная постоянная).

1-13. Сосуд с объемом $V = 20$ л содержит смесь водорода и гелия при температуре $t = 20\,^\circ$C и давлении $p = 2,0$ атм. Масса смеси $m = 5,0$ г. Найти отношение массы водорода к массе гелия в данной смеси.

Ответ: $$\frac{m_{\text{H}}}{m_{\text{He}}} = \left(\frac{pV}{RT} - \frac{m}{\mu_{\text{He}}}\right)\Big/\left(\frac{m}{\mu_{\text{H}}} - \frac{pV}{RT}\right) = 0,494.$$

1-14. Газ с молярной массой μ находится под давлением p между двумя одинаковыми горизонтальными пластинами. Температура газа линейно возрастает от значения T_1 у нижней пластины до T_2 у верхней. Объем газа между пластинами равен V. Найти его массу.

Ответ: $$m = \frac{\mu pV}{R(T_2 - T_1)}\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

1-15. Плотность смеси гелия и азота при нормальных условиях равна $0,6$ г/л. Найти концентрацию атомов гелия в данной смеси.

Ответ: $n_{\text{He}} = N_{\text{Ав}}(\mu_{\text{H}}p/RT - \rho)\big/(\mu_{\text{H}} - \mu_{\text{He}}) = 1,63\cdot 10^{19}$ см$^{-3}$.

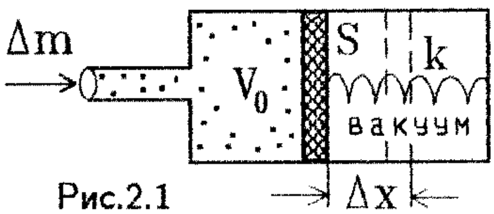

Рис.2.1

1-16. В хорошо проводящий тепло сосуд (рис.2.1) очень медленно со скоростью $\Delta m/\Delta t = 1,4\cdot 10^{-8}$ кг/с накачивают водород. В начальный момент газ в сосуде занимал объем $V_0 = 1$ л и находился под давлением $p_0 = 0,1$ МПа. На какое расстояние Δx сместится поршень с сечением $S = 10^{-3}$ м^2 за время $\tau = 300$ с, если температура окружающего воздуха $T = 290$ K, а жесткость пружины $k = 100$ Н/м?

Ответ: $\Delta x = 2,5$ см.

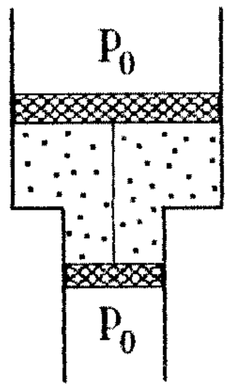

Рис.2.2

1-17. В гладкой закрытой с обоих концов вертикальной трубе, изображенной на рис.2.2, имеющей два разных сечения, находятся два поршня, соединенные нерастяжимой нитью, а между поршнями – один моль идеального газа. Площадь сечения верхнего поршня на $\Delta S = 10$ см^2 больше, чем нижнего. Общая масса поршней 5 кг ; давление наружного воздуха $p_0 = 1$ атм . На сколько градусов нужно нагреть воздух между поршнями, чтобы они переместились на 5 см ? Массу газа не учитывать.

Ответ: $\Delta T = (p_0 \Delta S + mg)\Delta l/(\nu R) = 0,904$ К.

1-18. В тонкостенный сферический баллон массы $M = 1$ кг нагнетается азот при температуре $T = 300$ К. Найти максимальное количество азота, которое можно закачать в баллон, если допустимое нормальное напряжение в его стенках $\sigma = 50$ Н/мм^2. Плотность стали $\rho = 7,8$ г/см^3.

Ответ: $m_{\max} = 2\sigma\mu M/(3RT\rho) = 48$ г.

Первое начало термодинамики. Теплота и работа

2-1. Теплоизолированный сосуд с идеальным газом, молярная масса которого μ и показатель адиабаты γ, движется со скоростью v. Найти приращение температуры газа при внезапной остановке сосуда.

Ответ: $\Delta T = 0,5\mu v^2(\gamma - 1)/R$.

2-2. Какую скорость должна иметь свинцовая пуля, чтобы полностью расплавиться при ударе о не проводящую тепло плиту ? Температура пули 27 °С, температура плавления свинца 327 °С, удельная теплота плавления свинца $q = 25$ кДж/кг, удельная теплоемкость свинца $c = 0,13$ кДж/(кг · К).

Ответ: $v \approx 360$ м/с.

2-3. Вода при соблюдении необходимых предосторожностей может быть переохлаждена до температуры −10 °С. Какая масса льда образуется из 1 кг такой воды, если бросить в нее кусочек льда и тем самым вызвать замерзание ? Теплоемкость переохлажденной воды можно считать не зависящей от температуры и равной теплоемкости обычной воды $c = 4,18$ кДж/(кг · К). Удельная теплота плавления льда $q = 333$ кДж/кг.

Ответ: $m = 126$ г.

2-4. Считая водород идеальным газом, найти работу, совершаемую одним молем водорода при нагревании его от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К, если молярная теплоемкость при этом нагревании изменяется по закону $C = a/T$, где $a = 831$ Дж.

Ответ: $A \approx -5,66$ кДж.

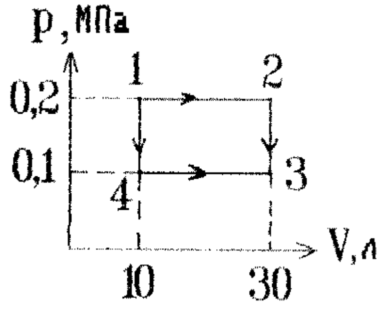

Рис.2.3

2-5. Некоторое тело переходит из состояния 1 в состояние 3 двумя разными путями, показанными на рис.2.3. Найти разность количеств тепла, сообщённых телу: $Q_{123} - Q_{143}$.

Ответ: 2 кДж.

2-6. Из баллона, содержащего водород под давлением 1 МПа и при температуре 291 К, выпустили половину газа. Считая процесс адиабатическим, найти установившиеся давление и температуру газа.

Ответ: $p = 0,379$ МПа, $T = 221$ К.

2-7. Моль идеального газа, имевший первоначально температуру 290 К, расширяется изобарически до удвоенного объема, после чего охлаждается изохорически до первоначальной температуры. Найти количество полученного газом тепла Q и приращение его внутренней энергии ΔU.

Ответ: $Q = 2,41$ кДж, $\Delta U = 0$.

2-8. Внутренняя энергия некоторого воображаемого газа определяется формулой $U = a\ln(T/T_0) + b\ln(V/V_0)$, где $a = 4$ кДж, $b = 5$ кДж. Первоначально газ находился в состоянии, характеризуемом параметрами: $V_1 = 20,0$ л, $p_1 = 0,1$ МПа, $T_1 = 300$ К. Затем газ изобарически расширяется до объема $V_2 = 30,0$ л, получая в ходе расширения количество тепла $Q = 4$ кДж. Найти конечную температуру газа T_2. p_0 и V_0 — постоянные величины.

Ответ: $T = 382$ К.

2-9. Внутренняя энергия некоторого воображаемого газа определяется формулой $U = a\ln(T/T_0) + b\ln(p/p_0)$, где $a = 3,00$ кДж, $b = 7,00$ кДж, а T_0 и p_0 – постоянные. Нагреваясь от $T_1 = 250$ К до $T_2 = 500$ К, газ получает количество тепла $Q = 14,33$ кДж и совершает работу $A = 4,56$ кДж. Как изменяется при этом давление газа?

Ответ: $\dfrac{p_2}{p_1} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{a/b} \exp\left(\dfrac{Q-A}{b}\right) = 3,00$.

2-10. Некоторое количество идеального одноатомного газа сжимают адиабатически до тех пор, пока давление газа не превзойдет начальное давление в 10 раз. Затем газ расширяется изотермически до первоначального объема. Во сколько раз конечное давление газа p_3 превышает начальное давление p_1?

Ответ: в 2,51 раза.

2-11. Два моля идеального газа при температуре 300 К охладили изохорически, вследствие чего его давление уменьшилось в два раза. Затем газ изобарически расширили так, что в конечном состоянии его температура стала равной первоначальной. Найти полное количество тепла, сообщенного газу в процессе перехода его из начального в конечное состояние.

Ответ: $Q = \nu RT_1/2 = 2,49$ кДж.

2-12. Один моль идеального двухатомного газа расширяется по закону $p = p_0 + \alpha/V$, где $p_0 = 0,1$ МПа, $\alpha = 100$ Па $\cdot$ м^3. Найти приращение внутренней энергии газа и совершенную им работу при увеличении объема от $V_1 = 1$ л до $V_2 = 2$ л.

Ответ: $\Delta U = 2,5(V_2 - V_1)p_0 = 250$ Дж,
$A = p_0(V_2 - V_1) + \alpha \ln(V_2/V_1) = 169$ Дж.

2-13. Найти температуру батареи, нагревающей комнату, если известно, что при уличной температуре $-20\,^\circ$C температура в комнате $+20\,^\circ$C, а при уличной температуре $-40\,^\circ$C температура в комнате $+10\,^\circ$C. Учесть, что теплопередача пропорциональна разности температур.

Ответ: $t = 60\,^\circ$C.

2-14. Вычислить теплоемкость одного моля водорода (считая его идеальным газом) для процесса, изображенного на рис.2.4.

Ответ: $C = 3R$.

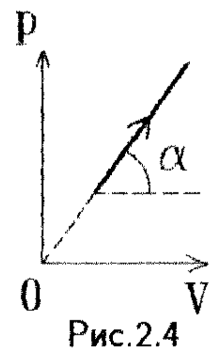

Рис.2.4

2-15. Вычислить величину C_p/C_V для газовой смеси, состоящей из двух молей кислорода ($\gamma_1 = 1,4$) и трех молей углекислого газа ($\gamma_2 = 8/6$). Газы считать идеальными.

Ответ: $\gamma = (5\gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_1 - 3\gamma_2)/(3\gamma_1 + 2\gamma_2 - 5) = 1,357$.

2-16. 176 г углекислого газа находились при температуре $t = 23\,^\circ$C под давлением $p = 1$ атм. До какого давления p' следует сжать углекислый газ в ходе процесса с молярной теплоемкостью $C = 1,5R$, чтобы при этом он получил тепло $Q = 29,93$ кДж ?

Ответ: $p' \simeq 32$ атм.

2-17. Коэффициент сжимаемости газа имеет вид $\beta = -\dfrac{1}{V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial p}$. Найти этот коэффициент для одного моля идеального газа (водорода) в случае а) изотермического и б) адиабатического расширения при давлении в 1 атм, а также построить графики зависимостей этого коэффициента от давления.

Ответ: а) $9,87 \cdot 10^{-6}$ м^2/Н, б) $7,05 \cdot 10^{-6}$ м^2/Н.

2-18. Найти работу, совершаемую тремя молями идеального газа при политропическом нагревании его на $\Delta T = 100$ К, если показатель политропы $n = 2$.

Ответ: $A = -3R\Delta T = -2{,}49$ кДж.

2-19. В вертикальном цилиндре под очень легким поршнем находится один моль идеального газа при температуре $T = 300$ К (поршень первоначально — в равновесии). Пространство над поршнем сообщается с атмосферой. Какую работу надо совершить, чтобы, медленно поднимая поршень, изотермически увеличить объем газа вдвое ? Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

Ответ: $A = RT(1 - \ln 2) = 765$ Дж.

2-20. Состояние одного моля трехатомного идеального газа меняется по закону $VT = \mathrm{const}$. Найти выражение для количества подведенного к газу тепла в зависимости от разности температур.

Ответ: $Q = 2R\Delta T$.

2-21. Три моля идеального газа, находящегося при температуре $t = 0\,°\mathrm{C}$, изотермически расширили в 5 раз, а затем изохорически нагрели так, что его давление в конечном состоянии стало равным первоначальному. За весь процесс газу сообщили количество тепла $Q = 7{,}9 \cdot 10^4$ Дж. Найти число степеней свободы молекулы этого газа.

Ответ: $i = \dfrac{Q}{6RT_0} - \dfrac{\ln 5}{2} = 5$.

2-22. Два теплоизолированных сосуда 1 и 2 наполнены воздухом и соединены короткой трубкой с краном. Объемы, давления и температуры воздуха в сосудах равны, соответственно, $V_1 = 2$ л, $p_1 = 0{,}3$ МПа, $T_1 = 500$ К, $V_2 = 4$ л, $p_2 = 0{,}9$ МПа, $T_2 = 200$ К. Найти температуру и давление воздуха, которые установятся после открытия крана.

Ответ: $p = \dfrac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 0{,}7$ МПа,

$$T = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{p_1V_1/T_1 + p_2V_2/T_2} = 219\ K.$$

2-23. Фабричная труба высотой 50 м выносит дым, температура которого $60\,°\mathrm{C}$. Найти разность давлений вне и внутри трубы в ее нижней части, создающую тягу в трубе, если температура наружного воздуха $-10\,°\mathrm{C}$, а его плотность равна $1{,}29$ г/см^3.

Ответ: 139 Па.

2-24. Космический корабль движется в идеальном двухатомном газе со скоростью 8 км/с. Найти максимальную температуру газа вблизи поверхности корабля, если температура газа вдали от него $-50\,°\mathrm{C}$. Молярную массу газа принять равной 30 г/моль. (Указание: использовать решение задачи 2.3 главы 1.)

Ответ: $T_{\max} \cong T + \mu v^2/(7R) \approx 3,3 \cdot 10^4$ К.

2-25. Газ адиабатически вытекает из сосуда через маленькое отверстие. Температура и давление газа в сосуде равны T_1 и p_1, наружное давление p_2. Найти скорость вытекающей струи, полагая, что $T_1 = 300$ К, $p_1 = 10$ атм, $\gamma = 1,30$, $c_p = 846$ Дж/(кг · К) и $p_2 = 1$ атм. (Указание: использовать решение задачи 2.3 главы 1.)

Ответ: $v = 457$ м/с.

2-26. Найти молярную теплоемкость идеального газа в процессе, уравнение которого на диаграмме $p - V$ изображается прямой линией $p = p_1 + k(V - V_1)$, где $p_1 = 0,1$ МПа, $V_1 = 20$ л, $k = 3,33$ МПа/м^3, а $\gamma = 1,40$.

Ответ: $C = \dfrac{3,5 + 600V}{1 + 200V} R$.

2-27. Определить, нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону а) $pV^2 = \text{const}$, б) $p^2V = \text{const}$? Найти также молярные теплоемкости газа в этих процессах.

Ответ: а) охлаждается; $C = C_V - R$, б) нагревается; $C = C_V + 2R$.

2-28. Три моля идеального газа нагревают от 320 К до 360 К таким образом, что его температура изменяется пропорционально шестой степени давления. Найти работу, совершенную газом в этом процессе.

Ответ: $A = 2,5R\Delta T = 831$ Дж.

2-29. В сосуде, закрытом поршнем, находится газ. Сверху поршень прижат пружиной (рис.2.5), упругие свойства которой подчиняются закону Гука. При нагревании газа его объем увеличивается на $0,2$ л, в то время как давление увеличивается от 1 атм до $1,2$ атм. Нарисовать на диаграмме $p-V$ график процесса и найти работу, совершаемую при этом газом.

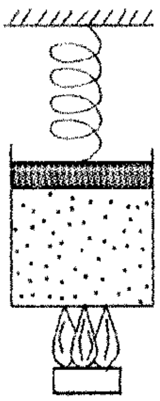
Рис.2.5

Ответ: $A = 22,3$ Дж.

2-30. Воздух с массой 58 г, находящийся под давлением $0,1$ МПа, изотермически сжимается до давления $0,5$ МПа. При этом совершается работа $8,03$ кДж. В конце сжатия к газу изобарически подводят тепло, равное теплу, отведенному при изотермическом сжатии. Найти конечные параметры газа. Воздух считать двухатомным газом

Ответ: $p_3 = 0,5$ МПа, $V_3 = 14,6$ л, $T_3 = 438$ К.

2-31. Молярная теплоемкость идеального газа с $\gamma = 1,4$ изменяется в ходе некоторого процесса по закону $C = \alpha + \beta/T$, где $\alpha =$

$= 20$ Дж/(моль $\cdot$ К), $\beta = 500$ Дж/моль. Является ли этот процесс политропическим? Если – нет, то показать это. Найти работу, совершаемую молем газа при нагревании от 200 К до 544 К.

Ответ: нет; $A = 230$ Дж.

2-32. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра находится легкоподвижный поршень. Первоначально поршень делит цилиндр на две равные части, каждая объемом $V_0 = 1$ л, в которых находится идеальный газ при одинаковой температуре T и под одинаковым давлением $p = 0,1$ МПа. Какую работу необходимо совершить, чтобы, медленно перемещая поршень, изотермически увеличить объем одной части газа в $\eta = 3$ раза по сравнению с объемом другой части?

Ответ: $A = p_0 V_0 \ln \dfrac{(1+\eta)^2}{4\eta} = 28,8$ Дж.

2-33. Считая, что углекислый газ является идеальным газом, найти его молярную теплоемкость для процесса, в котором внутренняя энергия зависит от объема по закону $U = \mathrm{const} \cdot V^3$. Вычислить также работу расширения газа в этом процессе при $\Delta U = 9$ кДж.

Ответ: $C = C_V + R/3 = 27,7 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$, $A = 1$ кДж.

2-34. При изотермическом расширении 2 кг водорода с начальными параметрами $p_1 = 0,6$ МПа, $V_1 = 8,31$ м^3 газ совершил работу $A = 5,47$ МДж. Затем газ был адиабатически сжат, причем при сжатии над газом была совершена такая же работа. Найти конечные параметры газа.

Ответ: $V_3 = 10,0$ м^3, $p_3 = 0,716$ МПа, $T_3 = 863$ К.

2-35. В цилиндрический ствол объема 200 см^3 влетает с открытого конца пуля массы 100 г со скоростью 250 м/с. В стволе находится аргон при давлении 1 атм и температуре 300 К. Пренебрегая утечкой газа через зазор между стволом и пулей, оценить верхний предел температуры, давления и плотности аргона, подвергнутого сжатию. Теплоемкостью пули пренебречь.

Ответ: $T = 3,11 \cdot 10^4$ К, $p = 1,10 \cdot 10^5$ атм, $\rho = 1720$ кг/м^3.

2-36. Один моль идеального газа, теплоемкость которого при постоянном давлении равна C_p, совершает процесс, в котором его температура изменяется по закону $T = T_0 + \alpha V$, где T_0 и α – постоянные. Найти теплоемкость газа в этом процессе как функцию его объема.

Ответ: $C = C_p + RT_0/\alpha V$.

2-37. Имеется идеальный газ, молярная теплоемкость которого при постоянном объеме равна C_V. Найти молярную теплоемкость этого газа как функцию его объема V для процесса, в котором его давление изменяется по закону $p = \mathrm{const} \cdot \exp(\alpha V)$, где $\alpha = \mathrm{const}$.

Ответ: $C = C_V + R/(1 + \alpha V)$.

2-38. Вывести для идеального газа уравнение процесса в переменных T, V, при котором молярная теплоемкость газа изменяется по закону а) $C = C_V + \beta V$, б) $C = C_V + \alpha p$, где β и α – постоянные.

Ответ: а) $T\exp(R/\beta V) = \mathrm{const}$, б) $V - \alpha T = \mathrm{const}$.

2-39. Вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен на две части поршнем массы m и площадью S. Под поршнем находятся ν молей двухатомного идеального газа, над поршнем – вакуум. При закрепленном поршне газ занимает объем V_0, а его температура равна T_0. Затем поршень освобождают, и он после нескольких колебаний приходит в равновесие. Найти температуру и объем газа в этом новом состоянии.

Ответ: $T = \dfrac{5}{7}T_0 + \dfrac{2}{7}\dfrac{mgV_0}{\nu RS}$, $V = \dfrac{2}{7}V_0 + \dfrac{5}{7}\dfrac{\nu RST_0}{mg}$.

2-40. Газ из одного и того же состояния нагревают до одной и той же температуры, но разными способами, показанными на рис.2.6, причем $p_2 > p_3$. В каком из процессов полученное газом количество тепла больше ?

Ответ: $Q_{12} < Q_{13}$.

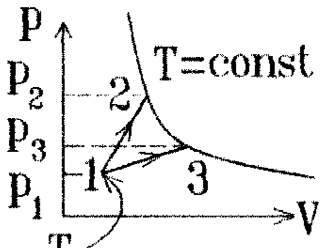

Рис.2.6

2-41. В вертикальном цилиндре с площадью поперечного сечения S под поршнем массы m находится один моль идеального одноатомного газа. В некоторый момент под поршнем включается нагреватель, передающий газу ежесекундно количество тепла dQ/dt. Найти установившуюся скорость движения поршня при условии, что давление газа над поршнем постоянно и равно p_0, а газ под поршнем теплоизолирован.

Ответ: $v = \dfrac{2}{5(p_0 S + mg)} \cdot \dfrac{dQ}{dt}$.

2-42. Может ли максимальная скорость струи при адиабатическом истечении идеального газа из сосуда через маленькое отверстие быть меньше скорости звука ? (Указание: использовать решение задачи 2.3 главы 1.)

Ответ: нет, так как $v_{\text{струи}} \leqslant v_{\text{зв}}\sqrt{2/(\gamma - 1)}$.

2-43. Один моль идеального газа, теплоемкость которого при постоянном давлении равна $C_p = 3R$, совершает процесс, в котором температура газа меняется по закону $T = T_0 + \alpha V$, где $T_0 = 300$ K,

$\alpha = 10^5$ К/м^3. Найти количество тепла, которое нужно сообщить газу, чтобы его объем увеличился от $V_1 = 1$ л до $V_2 = 2$ л.

Ответ: $Q = \alpha C_p \Delta V + T_0 R \ln 2 = 4,22$ кДж.

2-44. Выразить молярную теплоемкость C идеального двухатомного газа при политропическом процессе через показатель политропы n и определить, при каких значениях n теплоемкость C в ходе политропического процесса а)положительна, б)отрицательна, в)равна нулю, г)бесконечно велика ?

Ответ: $C = R(5n - 7)/(2n - 2)$.

2-45. При некотором политропическом процессе объем аргона увеличился в 4 раза, а давление уменьшилось в 8 раз. Найти молярную теплоемкость аргона в этом процессе, считая газ идеальным.

Ответ: $C = -R/2 = -4,16$ Дж/(К · моль).

2-46. Моль одноатомного идеального газа нагревается обратимо от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. В процессе нагревания давление газа изменяется по закону $p = p_0 \exp(\alpha T)$, где $\alpha = 1,0 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. Найти количество тепла, полученного газом при нагревании.

Ответ: $Q = 0,5R\Delta T[5 - \alpha(T_1 + T_2)] = 1,79$ кДж.

2-47. Один моль двухатомного идеального газа совершает процесс, описываемый уравнением $pT = \mathrm{const}$, причем температура в итоге повышается на 100 К. Какое количество тепла было при этом сообщено газу ?

Ответ: $Q = (C_V + 2R)\Delta T = 3,74$ кДж.

2-48. Один моль трехатомного идеального газа совершает процесс, при котором $p = a + b/V$, где $a = 0,2$ МПа, $b = 100$ Па · м^3. Найти молярную теплоемкость газа, как функцию занимаемого им объема, и количество тепла, сообщенного газу при расширении его от $V_1 =$ $= 1$ л до $V_2 = 10$ л.

Ответ: $C = [4 + b/(aV)]R$, $Q = 4a\Delta V + b\ln(V_2/V_1) = 7,43$ кДж.

2-49. Один моль углекислого газа совершает процесс, при котором $p = \alpha V + \beta$, где α и β – постоянные. Считая газ идеальным, определить, при каких условиях этот процесс – политропический, и вычислить теплоемкости всех возможных в этом случае политропических процессов.

Ответ: 1) $\alpha = 0$: $C = C_p = 4R$; 2) $\beta = 0$: $C = 3,5R$.

2-50. Один моль азота, занимавший при нормальных условиях объем $V_1 = 22,4$ л, адиабатически сжимается до объема $V_2 = V_1/2$, а затем изотермически расширяется до первоначального объема. Вычислить суммарную работу, производимую газом, и его конечную температуру, считая азот идеальным газом.

Ответ: $A = 263$ Дж, $T = 360$ К.

2-51. Водород, который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при этом его внутренняя энергия меняется по закону $U \sim \sim V^{\alpha}$, где V – объем газа, а $\alpha = 0,8$. Найти работу, производимую газом, и тепло, которое ему надо сообщить, чтобы его внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U = 20$ Дж.

Ответ: $Q = [1 + R/(\alpha C_V)]\Delta U = 30$ Дж; $A = 10$ Дж.

2-52. Один моль идеального двухатомного газа совершает процесс, при котором его давление зависит от температуры по закону $p = \alpha T^{\beta}$, где α и β – постоянные. Найти выражение для молярной теплоемкости газа в этом процессе.

Ответ: $C = R(3,5 - \beta)$.

2-53. Теплоизолированный сосуд разделен на 2 части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться без трения. Слева находится один моль идеального газа, справа – вакуум. Длина пружины, соединяющей поршень с правой стенкой сосуда, в свободном состоянии равна длине сосуда. Найти теплоемкость системы (теплоемкостью сосуда, пружины и поршня пренебречь). Тепло сообщается газу с помощью электрического нагревателя (рис.2.7).

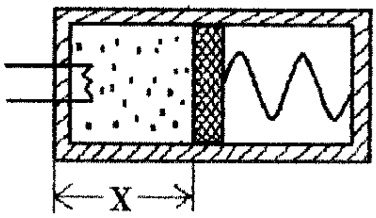

Рис.2.7

Ответ: $C = C_V + R/2$.

2-54. Двухатомный идеальный газ расширяют так, что сообщаемое газу тепло равно убыли его внутренней энергии. Найти совершаемую молем газа работу при увеличении его объема в два раза, если известно, что его начальная температура $T_0 = 300$ К. Вывести уравнение процесса в параметрах T, V.

Ответ: $A = 5RT_0\left(1 - 1/\sqrt[5]{2}\right) = 1,61$ кДж; $VT^5 = \mathrm{const}$.

2-55. Через теплоизолированный змеевик течет воздух. Температура на входе змеевика $T_1 = 300$ К, давление на входе вдвое больше давления на выходе. Какая работа совершается внешними силами при прохождении через змеевик 1 моля воздуха?

Ответ: $A = RT_1\left[1 - (p_2/p_1)^{(\gamma - 1)/\gamma}\right] = 448$ Дж.

2-56. Цилиндр с адиабатными стенками разделен на три части 1,2 и 3 теплоизолирующим поршнем Π_1 и теплопроницаемым поршнем Π_2 (рис.2.8), которые могут скользить по цилиндру без трения. В каждой из частей цилиндра находится по 0,1 молю идеального двухатомного газа при температуре $T_0 = 300$ К. Затем газ в части 1 медленно нагревается до тех пор, пока в части 3 температура не достигнет величины $T_3 = 340$ К. Найти полную энергию, сообщенную газу в части 1 при нагревании.

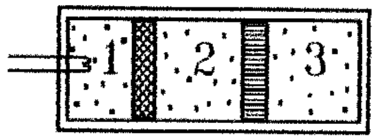

Рис.2.8

Ответ: $Q = (3i\nu RT_0/2)\cdot\left[(T_3/T_0)^{(i+2)/2} - 1\right] = 1,03$ кДж.

2-57. Некоторое количество идеального газа с $\gamma = 1,40$ расширяется от $V_1 = 20$ л до $V_2 = 50$ л так, что процесс на диаграмме $p - V$ имеет вид прямой линии. Исходное давление $p_1 = 0,1$ МПа, конечное $p_2 = 0,2$ МПа. Является ли процесс политропическим ? (Ответ аргументировать). Найти количество тепла, полученного газом в ходе процесса.

Ответ: нет; $Q = \dfrac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2} + \dfrac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1} = 24,5$ кДж.

2-58. Воздух, сжатый в большом баллоне при температуре $T_0 = 273$ К, вытекает в атмосферу по трубке, в конце которой он приобретает скорость 400 м/с. Найти температуру вытекающего воздуха и давление воздуха в баллоне, считая процесс истечения адиабатическим, а сам воздух – идеальным газом. (Указание: использовать решение задачи 2.3 главы 1.)

Ответ: $T = 193$ К, $p = 3,4$ атм.

2-59. Вычислить молярную теплоемкость идеального газа в процессе, показанном на рис.2.9. Показатель адиабаты γ для газа считать известным. Нарисовать график $C(V)$ и определить максимальную температуру, достигаемую газом в этом процессе.

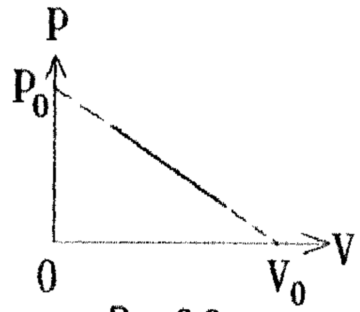

Рис.2.9

Ответ: $C = \dfrac{R}{\gamma - 1}\cdot\dfrac{\gamma - (\gamma+1)(V/V_0)}{1 - 2V/V_0}$,

$T_{\max} = p_0V_0/4R$.

2-60. Процесс обратимого перехода двухатомного идеального газа из состояния 1 в состояние 3, показанный на рис.2.10, состоит из изотермического участка 1 – 2 и адиабатического участка 2 – 3. В начальном состоянии $V_1 = 1$ л, $p_1 = 0,300$ МПа, в конечном – $V_3 = 2$ л, $p_3 = 0,133$ МПа. Вычислить работу A, совершаемую га-

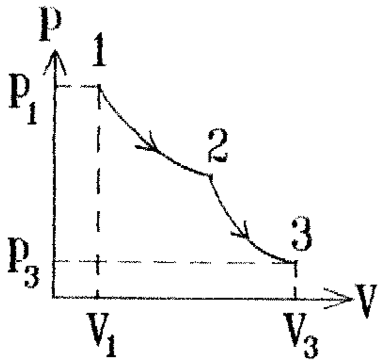

Рис.2.10

зом в процессе 1 – 2 – 3.

$$\textit{Ответ:}\quad A = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1V_1 \ln\frac{p_3V_3^{\gamma}}{p_1V_1^{\gamma}} + p_1V_1 - p_3V_3\right) = 203 \text{ Дж}.$$

2-61. Железный кубик массы m_1 и медный – массы m_2 стоят рядом на теплопроводящей подставке. На сколько изменится теплоемкость системы, если один из кубиков положить на другой ?

$$\textit{Ответ:} \text{ на }\quad \alpha_1 m_2 g\sqrt[3]{m_1/\rho_1} \quad\text{ или на }\quad \alpha_2 m_1 g\sqrt[3]{m_2/\rho_2}\,,$$

где $\alpha_{1,2}$ – коэффициенты теплового расширения, а $\rho_{1,2}$ – плотности.

2-62. Один моль углекислого газа, находящийся при температуре T_0 и давлении p_0, расширяется так, что его температура меняется по закону $T = bV - aV^2$, где b и a – известные константы. Найти изменение внутренней энергии газа при увеличении его объема вдвое. При каком условии она не изменится при расширении газа ? Определить также работу газа при расширении и найти зависимость $C(T)$ для этого процесса.

$$\textit{Ответ:}\ \Delta U = \frac{R^2T_0(b - 3aRT_0/p_0)}{p_0(\gamma - 1)}, \qquad A = \frac{R^2T_0}{p_0}\left(b - \frac{3aRT_0}{2p_0}\right),$$

$$C(T) = \frac{R}{\gamma - 1} + \frac{2aRT}{4aT - b^2 \pm b\sqrt{b^2 - 4aT}}.$$

2-63. В цилиндре под легким поршнем находится гремучий газ с объемом 0,1 л при температуре 300 °С и давлении 0,1 МПа. С какой высоты должен упасть на поршень груз массой 0,5 кг, чтобы газ воспламенился ? Каково давление смеси перед воспламенением ? Температура воспламенения гремучей смеси 500 °С.

Ответ: $h = 24{,}6$ см, $p = 0{,}211$ МПа.

2-64. Найти зависимость объема трех молей идеального двухатомного газа от температуры в ходе процесса, при котором теплоемкость газа обратно пропорциональна температуре: $C = \alpha/T$, где $\alpha = 10$ кДж. Начальные параметры газа: $V_0 = 1$ л, $T_0 = 400$ К, а молярная масса $\mu = 32$ г/моль. Построить график зависимости $V(T)$ в безразмерных переменных $v = V/V_0$, $\tau = T/T_0$.

$$\textit{Ответ:}\quad v = \frac{2{,}725}{\sqrt{\tau^5}}\exp\left(-\frac{1{,}0023}{\tau}\right).$$

2-65. Доказать, что температура адиабатической атмосферы линейно убывает с высотой и найти градиент температуры dT/dh. Адиабатической называется атмосфера, в которой на любой высоте давление и плотность связаны соотношением $p/\rho^{\gamma} = \text{const}$. Атмосферный воздух считать идеальным двухатомным газом с $\mu = 29$ г/моль.

Ответ: $\dfrac{dT}{dh} = -\dfrac{\mu g}{R} \cdot \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} \approx -9,78$ К/км.

2-66. Внутри вертикального сосуда с площадью сечения $S = 50$ см^2 с теплоизолированными стенками под свободным теплонепроницаемым поршнем массы $m = 1$ кг находятся трёхатомный идеальный газ и нагревательный элемент. Тепловая мощность, испускаемая нагревателем, изменяется со временем по закону $P = \alpha t \exp -\beta t$, где $\alpha = 200$ Вт/с, $\beta = 0,5$ с$^{-1}$. На какую высоту h поднимется поршень за все время работы нагревателя, начиная с $t = 0$?

Ответ: $h = \dfrac{\alpha}{4\beta^2(mg + p_0 S)}$, где p_0 – атмосферное давление.

2-67. Во сколько раз стартовая масса одноступенчатой ракеты должна превышать ее конечную массу, чтобы ракета могла достичь первой космической скорости v_1 ? Учесть, что истечение в вакуум продуктов горения топлива в двигателе ракеты происходит адиабатически (с показателем адиабаты $\gamma = 1,2$), средняя молярная масса продуктов горения $\mu = 30$ г/моль, а температура горения 3000 К. Силами тяжести и трения пренебречь. (Указание: использовать решение задачи 2.3 главы 1.)

Ответ: $\dfrac{m_0}{m} = \exp\left(v_1\sqrt{\dfrac{\mu}{RT} \cdot \dfrac{\gamma - 1}{2\gamma}}\right) = 12,2$.

2-68. В вертикальном цилиндре, закрытом с нижнего конца, может без трения двигаться поршень массы m. Под поршнем находится идеальный газ, масса которого много меньше массы поршня. В положении равновесия поршень отстоит от дна цилиндра на расстоянии h_0. Найти период малых колебаний поршня в двух крайних случаях: а) цилиндр и поршень – идеальные теплопроводники, б) – идеальные теплоизоляторы. Внешнее давление равно p_0, а площадь поршня S.

Ответ: а) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mh_0}{mg + p_0 S}}$, б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mh_0}{\gamma(mg + p_0 S)}}$.

2-69. Горизонтальный цилиндр длины $2b$ с теплоизолированными стенками разделен на две равные части нетеплопроводящим поршнем, который прикреплен к стенкам цилиндра первоначально недеформированными пружинами жесткости k каждая (рис.2.11). В каждой половине цилиндра находится по ν молей одноатомного идеального газа при температуре T. При сообщении газу в правой части количества тепла Q_1 поршень перемещается влево на $b/2$. Какое коли-

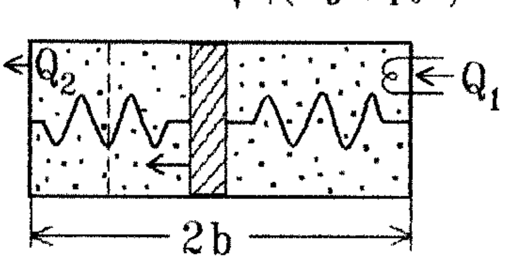

Рис.2.11

чество тепла Q_2 передает газ через левый торец цилиндра термостату с температурой T ?

Ответ: $Q_2 = Q_1 - 3\nu RT - 2,5kb^2$.

2-70. Один моль идеального одноатомного газа совершает процесс, при котором его молярная теплоемкость меняется обратно пропорционально давлению: $C = \alpha R/p$, где $\alpha = \text{const}$, R – универсальная газовая постоянная. Начальные температура T_0 и давление p_0 известны. Найти зависимость объема от температуры в ходе этого процесса и изобразить ее графически.

Ответ: $V = \dfrac{2,5RT}{\alpha - (KT)^{2,5}}$, где $K = \dfrac{1}{T_0}(\alpha - 2,5p_0)^{0,4}$.

2-71. В вертикальном цилиндрическом сосуде с достаточно высокими стенками (высоты H) находится 1 моль идеального газа. Найти теплоемкость газа, учитывая наличие поля тяжести и предполагая, что $\mu gH \ll RT$ (здесь μ – молярная масса газа). Расширением сосуда при нагревании пренебречь. (Указание: воспользоваться барометрической формулой.)

Ответ: $C = C_V + \dfrac{R}{12}\left(\dfrac{\mu gH}{RT}\right)^2$.

Второе начало термодинамики. Энтропия

3-1. Найти приращение энтропии при превращении 200 г льда, находящегося при температуре $-10,7\ ^\circ\text{C}$ и нормальном давлении, в воду при $0\ ^\circ\text{C}$. Удельную теплоемкость льда считать не зависящей от температуры и равной $2,1$ кДж/(кг $\cdot$ К), а удельную теплоту плавления льда – равной 333 кДж/кг.

Ответ: $\Delta S = 261$ Дж/К.

3-2. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1,3$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился вдвое, а давление уменьшилось в 3 раза.

Ответ: $\Delta S = -10,9$ Дж/К.

3-3. В некоторой температурной области энтропия термодинамической системы изменяется по закону $S = a + bT$, где $a = 100$ Дж/К, $b = 5,00$ Дж/К^2. Какое количество тепла получает система при обратимом нагревании от 290 К до 310 К ?

Ответ: $Q = 30$ кДж.

3-4. Известно, что в интервале температур от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К удельная теплоемкость алюминия линейно растет с температурой, т.е. $c = a + bT$, где $a = 0,77$ Дж/(г $\cdot$ К), $b = 0,45$ мДж/(г $\cdot$ К^2).

Найти приращение энтропии алюминиевого бруска с массой $m = 3$ кг в этом температурном интервале.

Ответ: $\Delta S = 2,01$ кДж/К.

3-5. Теплоемкость некоторых тел изменяется вблизи абсолютного нуля по закону $C = aT^3$, где a – константа. Определить энтропию тела при этих условиях.

Ответ: $S = C/3 + \mathrm{const}$.

3-6. Идеальный газ, расширяясь изотермически при температуре T, переходит из состояния 1 в состояние 2. Эти два состояния находятся на адиабатах, соответствующих значениям энтропии S_1 и S_2, как показано на рис.2.12. Найти работу газа в ходе этого процесса.

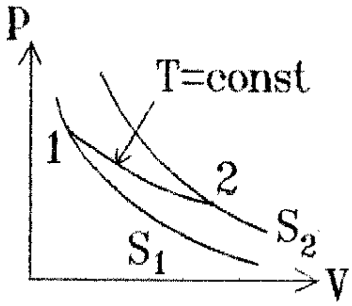

Рис.2.12

Ответ: $A = T(S_2 - S_1)$.

3-7. Один конец латунного стержня находится в термическом контакте с калориметром при температуре 127 °C, а другой – с калориметром при 27 °C. Найти полное изменение энтропии при переносе через стержень 1200 кДж тепла. Изменится ли при этом процессе энтропия самого стержня ? Ответ аргументировать.

Ответ: $\Delta S = 1$ кДж/К; нет.

3-8. Найти температуру T, как функцию энтропии S вещества для политропического процесса, при котором теплоемкость равна C. Известно, что при температуре T_0 энтропия вещества равна S_0. Изобразить примерные графики зависимости $T(S)$ при $C > 0$ и $C < 0$.

Ответ: $T = T_0 \exp[(S - S_0)/C]$.

3-9. Энтропия 1 г азота при температуре 25 °C и давлении 0,1 МПа равна $S_1 = 6,84$ Дж/(г · К). Определить энтропию 2 г азота при температуре 100 °C и давлении 0,8 МПа.

Ответ: $S_2 = m_2 S_1 + (Rm_2/\mu)\left[\ln(p_1/p_2) + 3,5\ln(T_2/T_1)\right] = 15,1$ Дж/К.

3-10. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части. В одной части находится 2 моля идеального газа, а в другой – вакуум. Найти изменение внутренней энергии и энтропии газа при удалении перегородки.

Ответ: $\Delta U = 0$; $\Delta S = 2R\ln 2$.

3-11. Процесс происходит так, что давление газа увеличивается прямо пропорционально его объему. Найти приращение энтропии двух молей аргона в таком процессе при увеличении его объема вдвое. Считать аргон идеальным газом.

Ответ: $\Delta S = 46,1$ Дж/К.

3-12. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором энтропия газа изменяется с температурой по закону $S = aT + C_V \ln T$, где a – положительная постоянная. Найти уравнение этого процесса в координатах T, V.

Ответ: $\dfrac{1}{V}\exp\left(\dfrac{aT}{R}\right) = \text{const}$.

3-13. Два куска металла с одинаковыми массами 1 кг каждый, с одинаковыми удельными теплоемкостями $c = 0,2$ МДж/(кг · К) и с температурами 27 °С и 77 °С приведены в соприкосновение. От окружающей среды куски теплоизолированы. Найти изменение энтропии этой системы при выравнивании температур.

Ответ: $\Delta S = cm\ln\left[(T_1 + T_2)^2/(4T_1T_2)\right] = 1,19$ кДж/К.

3-14. Найти зависимость энтропии одного моля трехатомного идеального газа от объема V для процесса, при котором давление газа пропорционально его объему.

Ответ: $S = 7R\ln V + \text{const}$.

3-15. Два моля идеального газа сначала изохорически охладили, а затем изобарически расширили так, что температура газа стала равной первоначальной. Найти приращение энтропии газа, если его давление в данном процессе изменилось в $\eta = 3,3$ раза.

Ответ: $\Delta S = \nu R\ln\eta = 19,9$ Дж/К.

3-16. Гелий массой $m = 1,7$ г сначала адиабатически расширили в $\eta = 3$ раза, а затем изобарически сжали до первоначального объема. Найти приращение энтропии в этом процессе.

Ответ: $\Delta S = -\dfrac{mR\gamma}{\mu(\gamma - 1)}\ln\eta = -9,7$ Дж/К.

3-17. Один моль трехатомного идеального газа совершает политропический процесс с показателем политропы $n = 1,3$, в результате которого абсолютная температура газа увеличивается в $k = 3$ раза. Найти приращение энтропии газа в этом процессе.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{(n-\gamma)R\ln k}{(n-1)(\gamma-1)} = -3,04$ Дж/К.

3-18. Один моль идеального газа с $C_V = 3R$ совершает процесс, при котором его энтропия S в некотором интервале температур зависит от температуры T, как $S = a/T$, где $a = 831$ Дж. Температура газа при этом изменилась от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Определить работу, которую совершил газ, а также зависимость его молярной теплоемкости от температуры.

Ответ: $A = a\ln(T_1/T_2) + C_V(T_1 - T_2) = -2,73$ кДж, $C = -a/T$.

3-19. Имеется сосуд, разделенный перегородкой на две неравные части. В одной части находится ν_1 молей одного газа, в другой – ν_2 молей другого газа. Температуры и давления обоих газов одинаковы; оба газа – идеальные. Перегородку убирают, и оба газа полностью перемешиваются. Найти приращение энтропии системы.

Ответ: $\Delta S = \nu_1 R\ln(1 + \nu_2/\nu_1) + \nu_2 R\ln(1 + \nu_1/\nu_2)$.

3-20. Трехатомный идеальный газ совершает процесс, уравнение которого имеет вид: $p = a - bV$, где $a = 0,2$ МПа и $b = 100$ МПа/м^3. При каком значении объема энтропия газа окажется максимальной ?

Ответ: $V_{\mathrm{m}} = \gamma a/[(1+\gamma)b] = 1,14$ л.

3-21. Один моль идеального газа с $\gamma = 1,4$ совершает обратимый процесс, в ходе которого энтропия газа изменяется пропорционально абсолютной температуре. В результате процесса внутренняя энергия газа изменяется от $U_1 = 6$ кДж/моль до $U_2 = 7$ кДж/моль. Значение энтропии в исходном состоянии $S_1 = 200$ Дж/(моль · К). Найти работу, совершаемую газом в ходе процесса.

Ответ: $A = \left[S_1U_2 + (S_1 - 2C_V)U_1\right] \cdot \dfrac{U_2 - U_1}{2U_1C_V} = 9,42$ кДж.

3-22. Два одинаковых теплоизолированных сосуда, соединенных трубкой с краном, содержат по одному молю одного и того же двухатомного идеального газа. Температура газа в одном сосуде $T_1 = 300$ К, в другом $T_2 = 400$ К. После открывания крана газ пришел в новое состояние равновесия. Найти приращение энтропии газа.

Ответ: $\Delta S = C_p \ln\dfrac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} = 0,600$ Дж/К.

3-23. В теплоизолированном сосуде, закрытом подвижным теплонепроницаемым поршнем, находится 0,5 кмоль гелия и 1 кг льда. В начальный момент температура льда 0 °С, а гелия 30 °С. Найти приращение энтропии системы при переходе к равновесию.

Ответ: $\Delta S = 58,5$ Дж/К.

3-24. Теплоизолированный цилиндр разделен невесомым поршнем на две одинаковые части. По одну сторону поршня находится 1 моль идеального газа с показателем адиабаты γ, а по другую – вакуум. Начальная температура газа T_0. Поршень отпустили, и газ заполнил весь цилиндр. Затем поршень медленно переместили в первоначальное положение. Найти приращения внутренней энергии и энтропии газа, происшедшие в результате протекания этих двух процессов.

Ответ: $\Delta U = RT_0(2^{\gamma-1} - 1)/(\gamma - 1)$; $\Delta S = R\ln 2$.

3-25. В замкнутой трубе объема V_0 с теплопроницаемыми стенками находится смесь двух идеальных газов по ν молей каждого. Начальное давление смеси равно p_0. У краев трубы находятся поршни (рис.2.13), каждый из которых прозрачен для одного из газов. При перемещении поршней в среднюю точку газы полностью разделяются. Вычислить работу, совершаемую внешними силами при изотермическом квазистатическом перемещении поршней, и найти изменение энтропии системы (газов и окружающей среды).

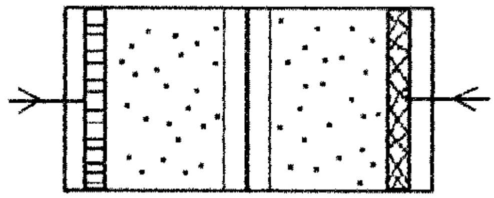

Рис.2.13

Ответ: $A = p_0V_0\ln 2$, $\Delta S = 0$.

3-26. В лаборатории забыли тонкостенный резиновый мешок с гелием объемом около 20 л. Когда о нем вспомнили, то оказалось, что весь гелий продиффундировал наружу. Предполагая температуру неизменной и равной 290 К, найти изменение энтропии гелия. Учесть, что в обычном атмосферном воздухе на один атом гелия приходится 10^7 молекул других газов. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы путем изотермического процесса снова собрать в мешок из атмосферы такое же количество гелия?

Ответ: $\Delta S = \dfrac{p_{\text{атм}}V}{T}\ln 10^7 \approx 113$ Дж/К; $A_{\min} = T\Delta S \approx$ $\approx 32{,}7$ кДж.

3-27. В объеме $V_1 = 3$ л находится $\nu_1 = 0{,}5$ моля кислорода O_2, а в объеме $V_2 = 2$ л – $\nu_2 = 0{,}5$ моля азота N_2 при температуре 300 К. Найти максимальную работу, которая может быть произведена при смешивании этих газов в суммарном объеме $V_1 + V_2$ в а) изотермическом и б) адиабатическом процессах. Оба газа считать идеальными.

Ответ: а) $A_{\max} = T\Delta S = 1{,}78$ кДж; б) $A_{\max} = \Delta U =$ $= 1{,}55$ кДж.

Циклические процессы. К.п.д. тепловых машин

4-1. Идеальная машина, работающая по обратному циклу Карно, забирает тепло от воды, имеющей температуру 0 °С, и передает его кипятильнику с температурой 100 °С. Сколько воды в кипятильнике превратится в пар при образовании 1 кг льда? Удельные теплоты парообразования воды и плавления льда равны соответственно

2,25 МДж/кг и 333 кДж/кг.

Ответ: 202 г.

4-2. Каким путем теоретически выгоднее повысить к.п.д. машины Карно: 1) увеличивая температуру нагревателя T_1 на ΔT при фиксированном значении температуры холодильника T_2 или 2) понижая температуру холодильника T_2 на такую же величину ΔT при фиксированном значении температуры нагревателя T_1?

Ответ: выгоднее второй путь.

4-3. Циклический процесс на диаграмме T–S изображается эллипсом, показанном на рис. 2.14. Используя данные, приведенные на этом рисунке, определить работу A, совершаемую рабочим телом за цикл.

Ответ: $A = 47,1$ кДж.

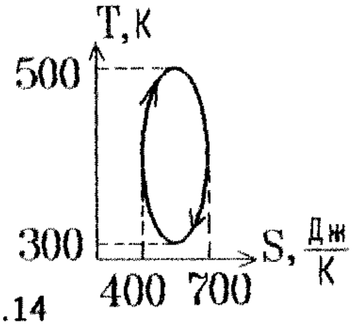

Рис.2.14

4-4. Найти максимальное количество тепла, которое может быть получено от холодильной камеры при помощи холодильной машины, затрачивающей 1 кДж работы. Температура в камере −10 °С, температура охлаждающей воды в теплообменнике 11 °С.

Ответ: $Q_{\max} = AT_2 \big/ (T_1 - T_2) = 12,5$ кДж.

4-5. Из-за несовершенства теплоизоляции в морозильную камеру холодильника поступает незначительная "паразитная" мощность в 0,1 Вт. Какую минимальную мощность нужно затратить, чтобы при температуре окружающей среды 17 °С поддерживать в камере холодильника температуру а) 10^{-4} К; б) −13 °С?

Ответ: а) 290 кВт; б) 11,5 мВт.

4-6. Рабочее вещество совершает цикл, изображенный на рис.2.15 в координатах $T - S$, причем в пределах цикла температура этого вещества изменяется в $k = 3$ раза. Найти к.п.д. цикла.

Ответ: $\eta = (k-1)/(k+1) = 50\%$.

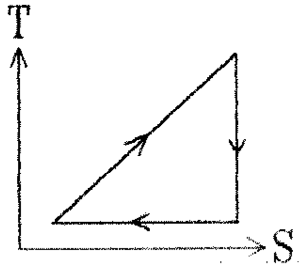

Рис.2.15

4-7. Обратимый цикл, совершаемый некоторой термодинамической системой, имеет на диаграмме $T - S$ вид, показанный на рис.2.16. Найти к.п.д. этого цикла.

Ответ: $\eta = 1 - (T_3 + T_4)/(T_1 + T_2)$.

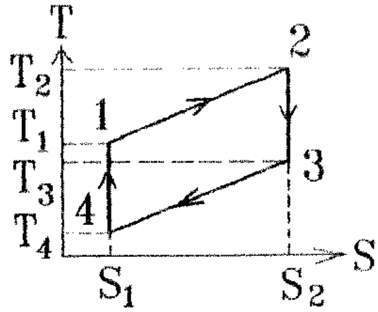

Рис.2.16

4-8. Водород совершает цикл Карно. Найти к.п.д. цикла, если при адиабатическом расширении: а) объем газа увеличивается в 2 раза, б) давление газа уменьшается в 2 раза.

Ответ: а) $\eta = 1 - 2^{1-\gamma} = 0,242$; б) $\eta = 1 - 2^{(1-\gamma)/\gamma} = 0,180$.

4-9. С помощью электроплитки с мощностью 1 кВт в комнате поддерживается температура 17 °C при температуре наружного воздуха −23 °C . Какая мощность потребовалась бы для поддержания в комнате той же температуры с помощью идеальной тепловой машины ?

Ответ: 138 Вт .

4-10. Циклический процесс на диаграмме $p - V$ изображается эллипсом, как показано на рис.2.17. Используя приведенные на рисунке данные, определить количество теплоты, получаемое рабочим телом за один цикл.

Ответ: $Q = -94,2$ Дж .

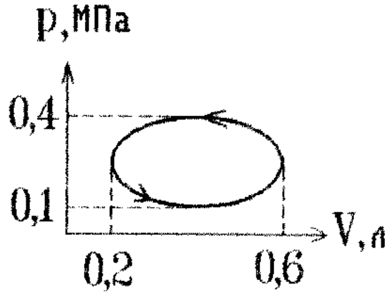

Рис.2.17

4-11. Считая, что атмосфера Земли является гигантской тепловой машиной, в которой роль нагревателя и холодильника играют экваториальная и полярная зоны, а источником энергии является солнечная радиация, оценить среднюю мощность, расходуемую на образование ветра, в расчете на 1 м^2 земной поверхности. Указание: при оценке исходить из того, что к.п.д. рассматриваемой "машины" на порядок меньше максимально возможного, суммарная мощность солнечного излучения, падающего на Землю, $\dot{Q} = 1,7 \cdot 10^{17}$ Вт , а температура экваториальной зоны в среднем в $k = 1,12$ раз превышает температуру полярной зоны. Радиус Земли $R = 6380$ км .

Ответ: $N = \dfrac{0,1(1 - k^{-1})\dot{Q}}{4\pi R^2} = 3,56$ Вт/м^2 .

4-12. Найти работу, которую идеальный газ совершает в цикле, изображенном на рис.2.18 при следующих значениях параметров: $V_4 - V_1 = 10$ л , $p_1 = 0,1$ МПа , $p_2 = 0,4$ МПа , $p_0 = 0,3$ МПа .

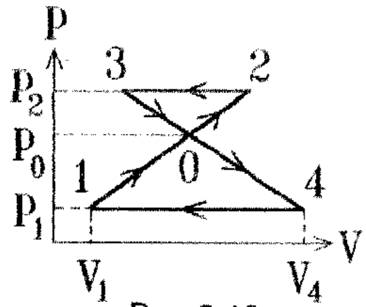

Рис.2.18

Ответ: $A = \dfrac{V_4 - V_1}{2} \cdot \dfrac{(p_0 - p_1)^2 - (p_2 - p_0)^2}{p_0 - p_1} = 750$ Дж .

4-13. Идеальный газ, молекулы которого трехатомны, совершает циклический процесс, состоящий из двух изотерм (при температурах $T_1 = 400$ К и $T_2 = 300$ К) и двух изохор (при объемах V_1 и V_2 , где $V_1/V_2 = e = 2,71828$). Найти к.п.д. цикла.

Ответ: $\eta = (T_1 - T_2)/(4T_1 - 3T_2) = 0,143$.

4-14. Найти к.п.д. цикла Отто, состоящего из двух изохор и двух адиабат, если в пределах цикла объем идеального газа изменяется в $k = 10$ раз. Рабочим веществом является азот.

Ответ: $\eta = 1 - k^{1-\gamma} = 0,602$.

4-15. Рабочее вещество совершает цикл, изображенный на рис.2.19 в координатах $T - S$, причем в пределах цикла абсолютная температура изменяется в два раза. Найти к.п.д. цикла.

Ответ: $\eta = 25\%$.

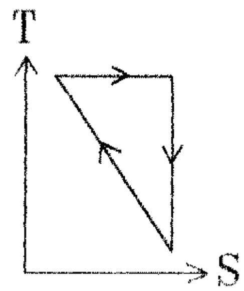

Рис.2.19

4-16. Найти к.п.д. четырехтактного двигателя внутреннего сгорания (рис.2.20), считая, что смесь воздуха с парами бензина и продуктами его сгорания ведет себя, как идеальный газ с показателем адиабаты γ, а степень сжатия равна n (степенью сжатия называется отношение V_2/V_1).

Ответ: $\eta = 1 - n^{1-\gamma}$.

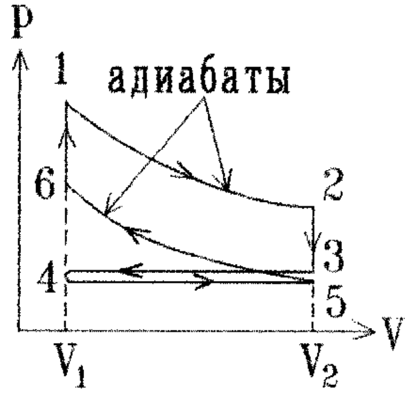

Рис.2.20

4-17. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изохоры, адиабаты и изотермы, причем изотермический процесс происходит при <u>минимальной</u> температуре цикла. Найти к.п.д. цикла, если абсолютная температура в его пределах изменяется в 10 раз.

Ответ: $\eta = 1 - (\ln 10)/9 = 0,744$.

4-18. Рабочим телом в цикле, изображенном на рис.2.21, являются 3 моля одноатомного идеального газа. Найти работу газа за цикл и к.п.д. цикла, используя следующие данные: $T_2/T_1 = 2$, $T_4/T_1 = 3$, $T_1 = 400$ К.

Ответ: $A \approx 20$ кДж; $\eta = 17,4\%$.

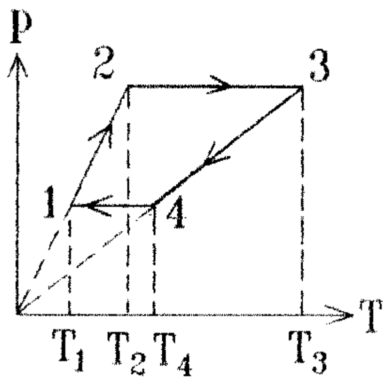

Рис.2.21

4-19. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего тела совершает цикл, состоящий из изобары, адиабаты и изотермы (рис.2.22). Найти к.п.д. машины, если известно, что отношение температур $T_1/T_2 = e = 2,718$.

Ответ: 36,8%.

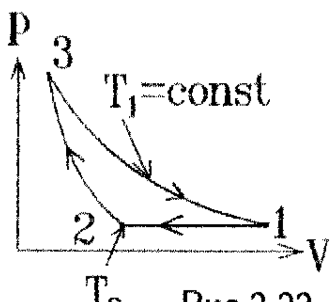

Рис.2.22

4-20. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изохоры, адиабаты и изотермы, причем изотермический процесс происходит при <u>максимальной</u> температуре цикла. Найти к.п.д. цикла, если известно, что в его пределах абсолютная температура изменяется в 10 раз.

Ответ: $\eta = 1 - 0,9/\ln 10 = 0,609$.

4-21. Найти к.п.д. цикла, изображенного на рис.2.23, рабочим телом в котором является идеальный двухатомный газ, а $T_3/T_1 = \alpha = 0,5$; $V_2/V_1 = \beta = 2$.

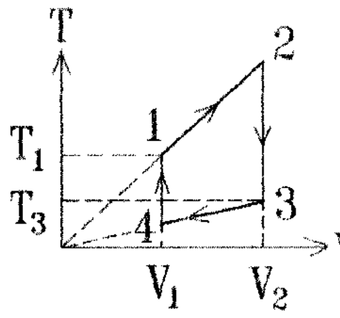

Рис.2.23

Ответ:
$$\eta = \frac{(\beta-1)(\beta-\alpha)}{3,5\beta^2 - 2,5\alpha - \beta} = 0,140.$$

4-22. Найти к.п.д. цикла, изображенного на рис.2.24, если известно, что отношение температур $T_1/T_3 = 3$. Рабочее тело – один киломоль идеального двухатомного газа.

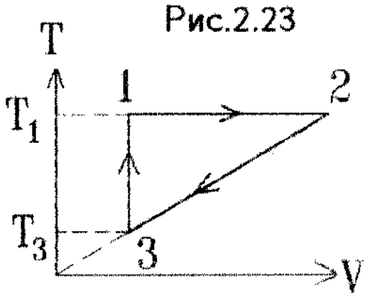

Рис.2.24

Ответ:
$$\eta = \frac{T_3/T_1 - 1 - \ln(T_3/T_1)}{2,5(1 - T_3/T_1) - \ln(T_3/T_1)} = 0,156\ .$$

4-23. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изобары, адиабаты и изотермы, причем изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла. Найти к.п.д. цикла, если абсолютная температура в его пределах изменяется в 2 раза.

Ответ: $\eta = 1 - 1/(2\ln 2) = 0,279$.

4-24. Вычислить к.п.д. прямого цикла, состоящего из изотермы, изобары и изохоры, если при изотермическом процессе объем идеального газа с показателем адиабаты γ увеличивается в 2 раза.

Ответ: $\eta = 1 - \gamma\Big/\Big[1 + (\gamma-1)2\ln 2\Big]$.

4-25. Найти к.п.д. цикла, состоящего из двух изобар и двух адиабат, если в пределах цикла давление изменяется в n раз. Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ.

Ответ: $\eta = 1 - n^{(1-\gamma)/\gamma}$.

4-26. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти к.п.д. цикла, если абсолютная температура газа возрастает в n раз как при изохорическом нагревании, так и при изобарическом расширении.

Ответ: $\eta = 1 - (n+\gamma)/(1+\gamma n)$.

4-27. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает прямой цикл, состоящий из адиабаты, изобары и изохоры. Найти к.п.д. цикла, если при адиабатическом процессе объем идеального газа увеличивается в n раз.

Ответ: $\eta = 1 - \gamma(n-1)/(n^{\gamma} - 1)$.

4-28. Вычислить к.п.д. прямого цикла, состоящего из адиабаты, изобары и изохоры, если при адиабатическом процессе объем идеального газа с показателем адиабаты γ уменьшается в 2 раза.

Ответ: $\eta = 1 - (2^{\gamma} - 1)\big/(\gamma \cdot 2^{\gamma-1})$.

4-29. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает прямой цикл, состоящий из изотермы, изобары и изохоры, причем при изотермическом процессе объем идеального газа уменьшается в k раз. Найти к.п.д. цикла.

Ответ: $\eta = \dfrac{(\gamma-1)(k-1-\ln k)}{\gamma(k-1)}$.

4-30. Один киломоль идеального двухатомного газа совершает цикл, изображенный на рис.2.25 (эллипс). Найти к.п.д. цикла и работу газа за цикл.

Ответ: $\eta = 2\pi/(\pi + 28) = 0{,}202$; $A = \pi p V$.

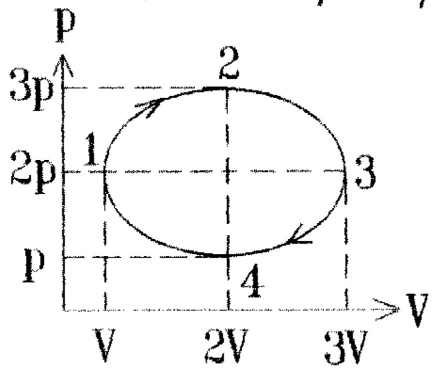

Рис.2.25

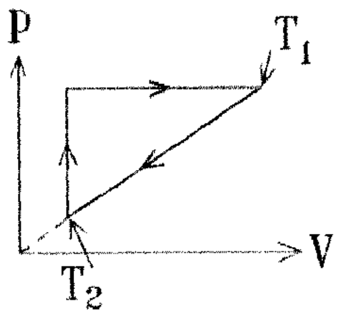

Рис.2.26

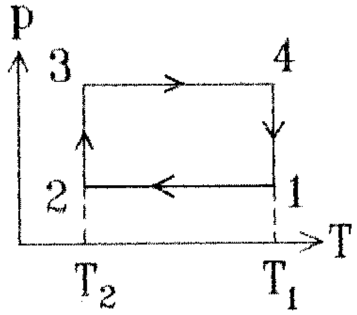

Рис.2.27

4-31. Найти к.п.д. обратимого цикла, изображенного на рис.2.26, как функцию температур: T_1 (максимальной) и T_2 (минимальной). Рабочее тело – многоатомный идеальный газ.

Ответ: $\eta = \dfrac{\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2}{4T_1 - \sqrt{T_1 T_2} - 3T_2}$.

4-32. Тепловая машина, рабочее тело которой – 1 моль идеального одноатомного газа, работает по замкнутому циклу, изображенному на рис.2.27. Найти изменение энтропии машины (нагревателя, холодильника и рабочего тела) за один цикл, учитывая, что температуры нагревателя T_1 и холодильника T_2 неизменны.

Ответ: $\Delta S > 2{,}5R(T_1 - T_2)^2/(T_1 T_2)$.

4-33. Во сколько раз изменится к.п.д. двигателя внутреннего сгорания (рис.2.20), если степень сжатия увеличится с 5 до 10 ? Указания: реальный цикл двигателя заменить идеальным замкнутым циклом, состоящим из двух изохор и двух адиабат, а рабочее вещество считать многоатомным идеальным газом. (Степенью сжатия называется отношение V_2/V_1).

Ответ: $$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1-(0,1)^{\gamma-1}}{1-(0,2)^{\gamma-1}} = 1,29\,.$$

4-34. Водород, который можно считать идеальным газом, совершает циклический процесс, состоящий из двух изотерм (при температурах $T_1 = 400$ K и $T_2 = 300$ K) и двух изобар (при давлениях p_1 и p_2, причем $p_2/p_1 = e = 2,71828$). Найти к.п.д. цикла.

Ответ: $\eta = 2(T_1 - T_2)/(9T_1 - 7T_2) = 0,133\,.$

4-35. Найти к.п.д. цикла, имеющего форму параллелограмма и совершаемого идеальным газом, если значения p_1, V_1 и T_4 на рис.2.28 считать известными. На всём протяжении процессов $1 \longrightarrow 2$ и $3 \longrightarrow 4$ теплоёмкости газа $C_{12} > 0$ и $C_{34} < 0$.

Ответ: $$\eta = \frac{p_1V_1 - \nu RT_4}{0,5(p_1V_1 + \nu RT_4) + \nu C_V T_4}\,.$$

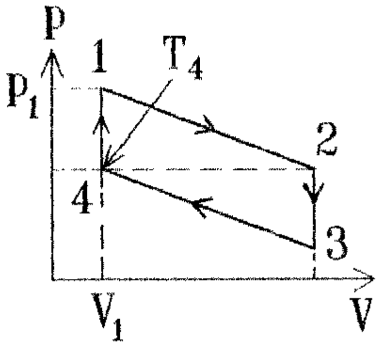

Рис.2.28

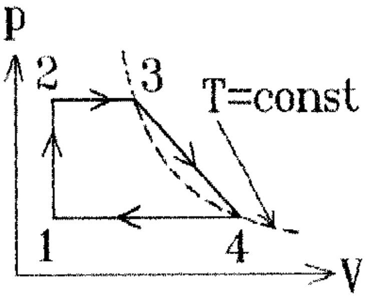

Рис.2.29

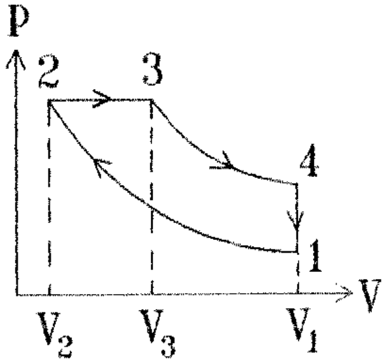

Рис.2.30

4-36. Найти к.п.д. цикла (рис.2.29), рабочим телом в котором является двухатомный идеальный газ, а температуры в состояниях 1, 2, 3 и 4 равны соответственно $T_1 = 300$ K, $T_2 = 400$ K, $T_3 = T_4 = 500$ K.

Ответ: $$\eta = \left[\frac{7(T_3 - T_1)}{(T_2 - T_1)(T_3/T_1 + T_3/T_2 - 2)} + 1\right]^{-1} = 0,0615\,.$$

4-37. Найти к.п.д. цикла, совершаемого идеальным газом с показателем адиабаты γ и состоящего из изобары, изохоры и двух адиабат (рис.2.30), если известны коэффициент адиабатического сжатия $n = V_1/V_2$ и коэффициент изобарического расширения $k = V_3/V_2$.

Ответ: $\eta = 1 - (k^\gamma - 1)\Big/[\gamma n^{\gamma-1}(k-1)]\,.$

4-38. Имеются два тела, нагретых до температур T_{10} и T_{20}, причем $T_{10} > T_{20}$. Какую работу можно получить, используя эти тела в качестве нагревателя и холодильника самой экономичной тепловой машины ? Теплоемкости тел C_1 и C_2 считать не зависящими от температуры. Найти также окончательную температуру, которую будут иметь тела, когда между ними установится тепловое равновесие.

Ответ: $A_{\max} = C_1T_{10} + C_2T_{20} - (C_1 + C_2)T$,
где $\ln T = (C_1 \ln T_{10} + C_2 \ln T_{20})/(C_1 + C_2)$.

4-39. Идеальный газ совершает прямой цикл, состоящий из чередующихся изотерм и адиабат, как показано на рис.2.31. Температуры, при которых происходят изотермические процессы, равны T_1, T_2 и T_3. Найти к.п.д. такого цикла, если при каждом изотермическом расширении объем газа увеличивается в одно и то же число раз.

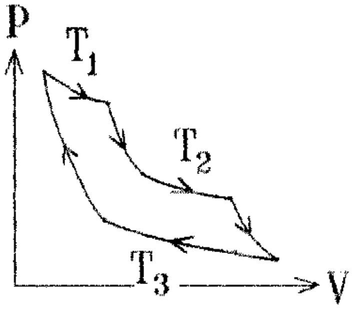

Рис.2.31

Ответ: $\eta = 1 - 2T_3/(T_1 + T_2)$.

4-40. Холодильник должен из воды, находящейся в помещении с температурой 25 °C, произвести одну тонну льда. Какое минимальное количество электроэнергии для этого необходимо ? $q_{\text{льда}} = 333$ кДж/кг ; $c_{\text{воды}} = 4,18$ кДж/(кг · К).

Ответ: 9,76 кВт · ч.

4-41. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает цикл, изображенный на рис.2.32. В пределах этого цикла абсолютная температура меняется в n раз. Найти к.п.д. этого цикла.

Ответ: $\eta = 1 - 2(\gamma + \sqrt{n})\big/[(1+\gamma)(1+\sqrt{n})]$.

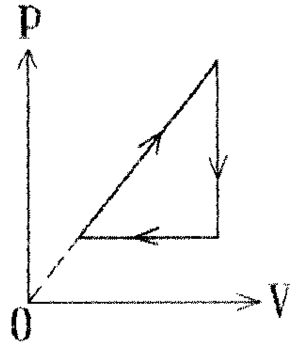

Рис.2.32

4-42. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермы, политропы и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при <u>максимальной</u> температуре цикла. Найти к.п.д. такого цикла, если абсолютная температура в его пределах изменяется в 2 раза.

Ответ: $\eta = 1 - 1/(2\ln 2) = 0,279$.

Уравнение Ван-дер-Ваальса

5-1. Считая углекислый газ ван-дер-ваальсовским газом с постоянной $a = 0,3667$ Па · м^6/моль^2, вычислить количество тепла, которое надо сообщить $\nu = 3$ молям углекислого газа, чтобы при его расширении в вакуум от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 10$ л температура газа не изменилась бы.

Ответ: $Q = \nu^2 a(V_2 - V_1)/V_1 V_2 = 330$ Дж .

5-2. Какому давлению нужно подвергнуть углекислый газ при температуре $T = 300$ К, чтобы его плотность оказалась равной $\rho = 500$ г/л ? Расчет провести для а) идеального газа, б) ван-дер-ваальсовского газа. Параметры Ван-дер-Ваальса для углекислого газа имеют значения: $a = 3,62$ атм $\cdot$ л^2/моль^2 , $b = 0,043$ л/моль , $R = 8,314$ Дж/(моль $\cdot$ К) .

Ответ: а) $p = \dfrac{\rho RT}{\mu} = 280$ атм ; б) $p = \dfrac{\rho RT}{\mu - b\rho} - \dfrac{a\rho^2}{\mu^2} = 79,7$ атм .

5-3. В двух баллонах с объемами V_1 и V_2, соединенных трубкой с краном, находится по 1 молю одного и того же ван-дер-ваальсовского газа при одинаковой температуре T_0 . Какие давление и температура установятся после открытия крана ? Внешние стенки баллонов теплоизолированы, C_V не зависит от температуры, а параметры Ван-дер-Ваальса для газа равны a и b .

Ответ: $p = \dfrac{2RT}{V_1 + V_2 - 2b} - \dfrac{4a}{(V_1 + V_2)^2}$; $T = T_0 - \dfrac{a(V_1 - V_2)^2}{2C_V V_1 V_2 (V_1 + V_2)}$.

5-4. Найти выражение для энтропии 1 моля ван-дер-ваальсовского газа в зависимости от T и V . Вычислить изменение энтропии 1 моля газа, переведенного из состояния с $V_1 = 1$ л и $T_1 = 300$ К в состояние с $V_2 = 2$ л и $T_2 = 200$ К, считая, что его молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = 10$ Дж/(моль $\cdot$ К) , а постоянная Ван-дер-Ваальса $b = 10^{-6}$ м^3/моль . $R = 8,314$ Дж/(моль $\cdot$ К) .

Ответ: $S = C_V \ln T + R\ln(V - b) + \mathrm{const}$; $\Delta S = 1,71$ Дж/(моль $\cdot$ К) .

5-5. Два теплоизолированных баллона соединены между собой трубкой с краном. В одном баллоне с объемом $V_1 = 10$ л находится $\nu = 2,5$ моля углекислого газа. Второй баллон с объемом $V_2 = 100$ л откачан до высокого вакуума. Кран открыли, и газ заполнил второй баллон. Считая, что газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти приращение его температуры в результате расширения. Принять $a = 0,3667$ Па $\cdot$ м^6/моль^2 , $R = 8,314$ Дж/(моль $\cdot$ К) .

Ответ: $\Delta T = -\dfrac{\nu a V_2(\gamma - 1)}{RV_1(V_1 + V_2)} = -3,34$ К .

5-6. Для одного моля ван-дер-ваальсовского газа вычислить величину

$$f = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T .$$

Ответ: $f = -1$.

5-7. Для определения постоянных Ван-дер-Ваальса некоторое количество газа, занимающее при $T_1 = 300$ К и $p_1 = 10$ МПа объем $V_1 = 0,679$ л, было изотермически сжато до объема $V_2 = 0,400$ л, в результате чего давление возросло до значения $p_2 = 16,5$ МПа. Затем газ был охлажден при неизменном объеме до температуры $T_2 = 200$ К; при этом давление уменьшилось до значения $p_3 = 8,19$ МПа. Воспользовавшись этими данными, вычислить значения поправок Ван-дер-Ваальса a и b для моля газа, считая, что $R = 8,314$ Дж/(моль · К).

Ответ: $a = 0,15$ Па · м^6/моль^2; $b = 3,32 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

5-8. Вывести для ван-дер-ваальсовского газа уравнения адиабаты в переменных $V - T$ и в переменных $p - V$. Сравнить полученные выражения с аналогичными для идеального газа.

Ответ: $T(V - \nu b)^{\alpha} = \mathrm{const}$; $(p + \nu^2 a/V^2) \cdot (V - \nu b)^{\alpha+1} = \mathrm{const}$, где $\alpha = R/C_V$.

5-9. Уравнение состояния одного моля неидеального газа имеет вид: $p(V - V_0) = RT$, где $R = 8,314$ Дж/(моль · К), а V_0 – объем $N_{\text{Ав}}$ молекул. Определить объем одной молекулы, если при изотермическом расширении этого газа при $t = 0\,^\circ$C от объема $V_1 = 22,4$ л до вдвое большего объема приток тепла был равен 1575 Дж.

Ответ: $V_{\text{молекулы}} = \dfrac{V_1\,[\exp(Q/RT) - 2]}{N_{\text{Ав}}\,[\exp(Q/RT) - 1]} = 5,72 \cdot 10^{-29}$ м^3.

5-10. Один моль неидеального газа описывается уравнением состояния $p(V - V_0) = RT$, где $V_0 = 1,4 \cdot 10^{-6}$ м^3, а $R = 8,314$ Дж/(моль · К). Получить соотношение между p и V для этого газа в случае адиабатического расширения и определить C_V из условия, что при адиабатическом уменьшении давления в 1,02 раза первоначальный объем газа $V_1 = 1$ л увеличился до $V_2 = 1,01327$ л.

Ответ: $p(V - V_0)^{\gamma} = \mathrm{const}$; $C_V = 2R$.

5-11. Определить для ван-дер-ваальсовского газа разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$ и вычислить значение этой разности для азота при $V = 1$ л и $t = -100\,^\circ$C. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота: $a = 0,137$ Па · м^6/моль^2, $b = 3,9 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль, а R принять равной универсальной газовой постоянной.

Ответ: $C_p - C_V = R\left(1 - \dfrac{2a(V-b)^2}{RTV^3}\right)^{-1} = 10,1\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Жидкости. Поверхностное натяжение. Капиллярные явления

6-1. Найти капиллярное давление: а) в капельках ртути диаметра $d = 1,5$ мкм, б) внутри мыльного пузыря диаметра 3 мм, если коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma_{\text{М}} = 45$ мН/м, а ртути – $\sigma_{\text{р}} = 490$ мН/м.

Ответ: а) $\Delta p = 12,9$ атм; б) $\Delta p = 1,18 \cdot 10^{-3}$ атм.

6-2. Дно решета представляет собой натертую воском поверхность с площадью $S = 5$ дм^2 и с круглыми отверстиями диаметра 1 мм каждое. Оценить, какое наибольшее количество воды можно унести в таком решете за один раз.

Ответ: $V_{\max} \approx 4\sigma S/(\rho g d) = 1,49$ л.

6-3. Какое количество тепла будет поглощено из атмосферы при конденсации $N = 10^{10}$ капелек тумана с массой $m = 0,5$ мкг каждая. Считать, что $\partial\sigma/\partial T = -1,5 \cdot 10^{-4}$ Н/(м · К), $T = 300$ К.

Ответ: $$Q = NT\sqrt[3]{\frac{36\pi m^2}{\rho^2}}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right| = 13,7 \text{ Дж}.$$

6-4. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы изотермически выдуть мыльный пузырь радиуса R, если давление окружающего воздуха p_0 и поверхностное натяжение мыльной воды σ.

Ответ: $$A = 8\pi R^2\sigma + \left(p_0 + \frac{4\sigma}{R}\right)\frac{4}{3}\pi R^3 \ln\left(1 + \frac{4\sigma}{Rp_0}\right).$$

6-5. Дно сосуда имеет узкую длинную прямую прорезь. Вода с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 0,073$ Н/м налита в сосуд до высоты $h = 20$ см и не смачивает края прорези. При какой наибольшей ширине Δx прорези вода не будет вытекать через неё?

Ответ: $$\Delta x_{\max} \approx \frac{2\sigma}{\rho g h} = 74,4 \text{ мкм}.$$

6-6. Мыльный пузырь летает в воздухе при нормальных условиях. Температура воздуха внутри пузыря на $\Delta T = 1$ К выше, чем снаружи, а массой мыльной плёнки можно пренебречь. При каком радиусе пузыря он будет подниматься вверх? Коэффициент поверхностного натяжения мыльной плёнки $\sigma = 0,045$ Н/м.

Ответ: $$r > \frac{4\sigma T}{p\Delta T} = 0,485 \text{ мм}.$$

6-7. Крошечный пузырёк воздуха радиуса $r = 2$ мкм образовался на дне водоёма и всплыл на поверхность, причём за время всплытия его радиус увеличился в $n = 1,2$ раз. Считая, что коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0,073$ Н/м не зависит от давления, а температура воздуха в пузырьке не меняется, определить глубину h водоёма.

Ответ: $h = \dfrac{1}{\rho g}\left[p_{\text{атм}}(n^3 - 1) + \dfrac{2\sigma}{r_1}(n^2 - 1)\right] = 9,15$ л.

6-8. Найти разность между радиусами кривизны капли в её верхней и нижней точках, если капля равномерно падает в воздухе, а её вертикальная длина $h = 2$ мм.

Ответ: $R_{\text{в}} - R_{\text{н}} \approx \rho g h^3/(8\sigma) = 0,134$ мм.

6-9. Чтобы стряхнуть ртуть в медицинском термометре, необходимо ускорение $a \approx 5g$. Оценить диаметр перетяжки в капилляре термометра, если высота столбика ртути выше перетяжки $h = 3$ см.

Ответ: $d \approx 4\sigma/(a\rho h) = 9.79 \cdot 10^{-5}$ м.

6-10. Два стеклянных диска с радиусами $R = 5{,}0$ см смочили водой и сложили вместе так, что толщина слоя воды между ними $h = 1{,}9$ мкм. Считая смачивание полным, найти силу, которую нужно приложить перпендикулярно к плоскости дисков, чтобы оторвать их друг от друга.

Ответ: $F = 2\pi R^2\sigma/h = 604$ Н.

6-11. Две плоские параллельные пластинки опускают вертикально в воду. На какую высоту h поднимется вода в пространстве между пластинками, если расстояние между ними $l = 1$ мм, краевой угол смачивания $\theta = 60^\circ$, а коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0,073$ Н/м ?

Ответ: $h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g l} = 7,44$ мм.

6-12. Площадь мыльной пленки изотермически увеличили на $\Delta\Sigma$ при температуре T. Зная поверхностное натяжение мыльной воды σ и температурный коэффициент $\partial\sigma/\partial T$, найти изменение энтропии и внутренней энергии поверхностного слоя.

Ответ: $\Delta S = -2\dfrac{\partial\sigma}{\partial T}\Delta\Sigma$; $\Delta U = 2\left(\sigma - T\dfrac{\partial\sigma}{\partial T}\right)\Delta\Sigma$.

6-13. Две одинаковые капельки ртути с радиусами $r = 1$ мм каждая быстро (адиабатически) слились в одну. Коэффициент поверхностного натяжения σ ртути при понижении температуры на $\Delta T = 1$ К уменьшается на величину $\Delta\sigma = 1,75 \cdot 10^{-4}$ Н/м. Удельная теплоёмкость ртути $c = 140$ Дж/(К · кг). На какую величину уменьшится температура капли после слияния, если первоначальная температура капелек была $T = 300$ К ?

Ответ: $|T' - T| = \left(1 - 2^{-1/3}\right)\dfrac{3T}{\rho c r_1}\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta T} = 1,71 \cdot 10^{-5}$ К.

6-14. Две вертикальные пластинки, погруженные частично в смачивающую жидкость, образуют клин с очень малым углом $\delta\varphi$. Ребро клина вертикально. Плотность жидкости ρ, ее поверхностное натяжение σ, краевой угол θ. Найти высоту h поднятия жидкости как функцию расстояния x от ребра клина.

Ответ: $h \approx 2\sigma\cos\theta/(\rho g x \delta\varphi)$.

6-15. Найти время исчезновения мыльного пузыря радиуса $R = 2$ см, соединенного с атмосферой капилляром длины $l = 3$ см и радиуса $r = 0,5$ мм. Поверхностное натяжение $\sigma = 0,073$ Н/м, коэффициент вязкости воздуха $\eta = 1,72\cdot10^{-5}$ Па $\cdot$ с.

Ответ: $t = \dfrac{2l\eta}{\sigma}\left(\dfrac{R}{r}\right)^4 = 36,2$ с.

6-16. Найти разность давлений насыщенных паров над плоской и искривленной поверхностями жидкости (рис.2.33). Считать известными удельные объемы пара и жидкости $v_п$ и $v_ж$, коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус капилляра r. Зависимостью плотности пара от высоты h пренебречь.

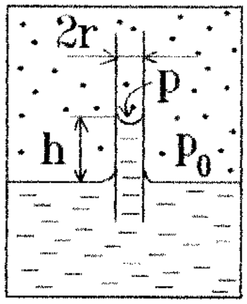

Рис.2.33

Ответ: $p_0 - p = \dfrac{v_ж}{v_п - v_ж}\dfrac{2\sigma}{r} \approx \dfrac{v_ж}{v_п}\dfrac{2\sigma}{r}$.

6-17. Смачиваемая плоская вертикальная пластина (краевой угол равен 0) опущена в воду. На какую высоту h поднимется вода вблизи пластины?

Ответ: $h = \sqrt{2\sigma/\rho g} = 3,86$ мм.

6-18. Внутри мыльного пузыря радиуса r находится идеальный газ. Наружное давление p_0, поверхностное натяжение мыльной воды σ. Найти разность между молярной теплоемкостью газа при нагревании его внутри пузыря и молярной теплоемкостью этого газа при постоянном давлении $C - C_p$. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной плёнки σ считать постоянным.

Ответ: $C - C_p = 2R\left(1 + \dfrac{3p_0 r}{8\sigma}\right)^{-1}$, где R – универсальная газовая постоянная.

6-19. Длинная прямоугольная пластинка кладется на поверхность смачивающей ее жидкости, а затем слегка приподнимается, увлекая за собой некоторое количество жидкости (рис.2.34). Найти уравнение боковой поверхности жидкости, устанавливающей под влиянием силы поверхностного натяжения и силы тяжести.

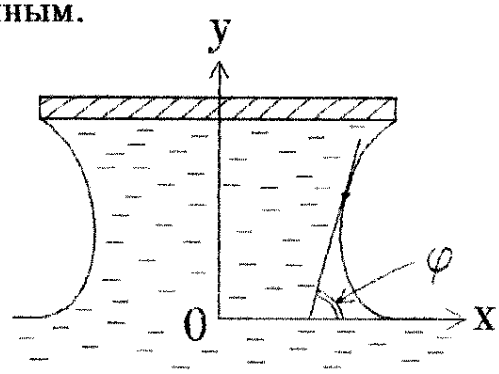

Рис.2.34

Ответ: $\begin{cases} \rho g y dy + \sigma \sin\varphi d\varphi = 0 \\ \rho g y dx + \sigma \cos\varphi d\varphi = 0 \end{cases}$ (в виде системы дифференциальных уравнений). Интегрирование системы дает параметрические уравнения поверхности жидкости:

$$x = x_{\min} + a\left\{\sqrt{2} - 2\sin(\varphi/2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\big(1+\sin(\varphi/2)\big)(\sqrt{2}-1)}{\big(1-\sin(\varphi/2)\big)\left(\sqrt{2}+1\right)}\right)\right\},$$

$y = 2a\cos(\varphi/2)$, где $a = \sqrt{\sigma/(\rho g)}$.

6-20. Определить форму мыльной пленки, края которой закреплены на двух одинаковых кольцах радиуса R, удаленных друг от друга на расстояние $2h$. Центры колец лежат на одной прямой, перпендикулярной их плоскостям, и плоскости колец не затянуты пленкой. Силу тяжести не учитывать.

Ответ: $y = \dfrac{\operatorname{ch}(ax)}{a}$, где x — расстояние вдоль оси колец, а постоянная a находится из уравнения $aR = \operatorname{ch}(ah)$.

Фазовые превращения

7-1. Пространство в цилиндре под поршнем занимает насыщенный водяной пар с температурой $t = 100\ ^\circ\mathrm{C}$ при атмосферном давлении $p_{\text{атм}}$. Первоначальный объём пара $V_0 = 5{,}0$ л. Найти массу жидкости, образовавшейся в результате изотермического уменьшения объема под поршнем до 1,6 л. Насыщенный пар считать идеальным газом.

Ответ: $m_{\text{ж}} = \dfrac{p_{\text{атм}}(V_0 - V)\mu}{RT} = 2{,}0$ г.

7-2. Рабочим телом цикла Карно является $\nu = 1$ моль воды с удельной теплотой парообразования $q = 2250$ кДж/кг. После адиабатического охлаждения до температуры $t_2 = 100\ ^\circ\mathrm{C}$ вся вода превращается в насыщенный пар, который сжимают до его полной конденсации в кипяток. Сразу после этого воду адиабатически сжимают до температуры $t_1 = 200\ ^\circ\mathrm{C}$. Вычислить работу, производимую за один цикл.

Ответ: $A = 10{,}9$ кДж.

7-3. Некоторую массу вещества, взятого в состоянии насыщенного пара, изотермически сжали в n раз по объему. Найти, какую часть η по объему занимает жидкая фаза, если плотности насыщенного пара и жидкой фазы отличаются друг от друга в N раз ($N > n$).

Ответ: $\eta = (n-1)\big/(N-1)$.

7-4. Найти молярную теплоту испарения ртути как функцию температуры T, если давление насыщенного пара ртути зависит от температуры по закону $\ln p = -a/T - b\ln T + c$, где a, b, c –постоянные.

Ответ: $q_{\text{мол}} = R(a - bT)$.

7-5. При $0\,^\circ$C удельный объем льда относится к удельному объему воды как 1,091 к 1,000. Найти приращение температуры плавления льда вблизи $0\,^\circ$C при повышении давления на $\Delta p = 1$ атм. Удельная теплота плавления льда $q_{\text{пл}} = 333$ кДж/кг.

$$\textit{Ответ:}\quad \Delta T = -\frac{0{,}091T\Delta p}{q_{\text{пл}}\rho_{\text{в}}} = -7{,}56\cdot 10^{-3}\ \text{K}.$$

7-6. Определить давление насыщенного водяного пара при температуре $t = 101{,}1\,^\circ$C, считая его идеальным газом. Удельная теплота парообразования при этой температуре $q = 2257$ кДж/кг.

$$\textit{Ответ:}\ p \approx p_{\text{атм}}\left(1 + \frac{q\mu(T - T_0)}{RT_0^2}\right) = 1{,}036\ \text{атм},\ \text{где}\ T_0 = 373\ \text{K}.$$

7-7. Лед, находившийся при нормальных условиях, подвергли сжатию до давления $p = 640$ атм. Считая, что понижение температуры плавления льда в данных условиях линейно зависит от давления, найти, какая часть льда растаяла. Удельный объем льда в 1,091 раз больше удельного объема воды.

$$\textit{Ответ:}\quad \frac{\Delta m}{m_{\text{л}}} \approx \frac{0{,}091Tpc}{\rho_{\text{в}}q^2} = 0{,}03,$$ где q – удельная теплота плавления, c – удельная теплоёмкость льда, а $T \approx 273$ K.

7-8. Из закрытой стеклянной колбы с объёмом $V = 1$ литр, в которой находится немного ртути и её насыщенные пары при температуре $T_0 = 300$ K и давлении $p_0 = 0{,}221$ Па, откачан воздух. Сколько ртути испарится при повышении температуры до $T = 310$ K ? Удельную теплоту испарения ртути в этом интервале температур считать постоянной и равной $q = 284$ кДж/кг.

$$\textit{Ответ:}\quad \Delta m = \alpha p_0 V\left(\beta\, e^{(1-\beta)q\alpha} - 1\right) = 1{,}82\cdot 10^{-8}\ \text{кг},\ \text{где}$$
$$\alpha = \frac{\mu}{RT_0},\quad \beta = \frac{T_0}{T}.$$

7-9. При $t_1 = 0\,^\circ$C упругость водяного пара $p_1 = 4{,}58$ мм рт.ст. Удельная теплота плавления льда при $0\,^\circ$C $q_1 = 333$ Дж/г. Удельная теплота испарения воды при $0\,^\circ$C $q_2 = 2504$ Дж/г. Найти упругость водяного пара над льдом при $t_2 = -1\,^\circ$C.

$$\textit{Ответ:}\quad p_2 \approx p_1 + \left[1 + \frac{q(T_2 - T_1)\mu}{T_1^2 R}\right] = 4{,}20\ \text{мм рт.ст.},\ \text{где}$$
$q = q_1 + q_2$ – удельная теплота возгонки пара.

7-10. Температура воды в тройной точке $0{,}0075\,^\circ$C, удельная теплота плавления льда при этой температуре $q_{\text{пл}} = 335$ кДж/кг, плотность насыщенного водяного пара в тройной точке $\rho = 4,85$ г/м^3 намного меньше, чем плотность воды или льда. Что больше — давление насыщенного пара над водой $p_в$ или над льдом $p_л$ при температуре 0 °C ? Найти величину разности этих давлений.

Ответ: $p_в > p_л$; $p_в - p_л \approx \dfrac{q_{пл}\,\rho}{T}|\Delta T| = 44,6$ мПа.

7-11. Водяной пар, находящийся под поршнем в цилиндре, сжимают (или расширяют) так, что он все время остается насыщенным, находясь на грани конденсации. Найти молярную теплоемкость C пара в данном процессе как функцию температуры T, считая пар идеальным газом и пренебрегая удельным объемом жидкости по сравнению с удельным объемом пара. Указание: представить работу пара в виде $\delta A = d(pV) - -Vdp$.

Ответ: $C = C_p - q\mu/T$, где q – удельная теплота парообразования.

7-12. Удельная теплота испарения воды изменяется с температурой T по закону $q = q_0 - \alpha(T - T_0)$, где $q_0 = 2454$ кДж/кг, $T_0 = 293$ К – начальная температура. При нагревании на $\Delta T = 19$ К давление насыщенного пара возрастает в $\eta = 3$ раза. Определить величину постоянной α.

Ответ: $\alpha = \left[q_0\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T}\right) - \dfrac{R}{\mu}\ln\eta\right] \Big/ \left[\ln\left(\dfrac{T}{T_0}\right) - 1 + \dfrac{T_0}{T}\right] = 1,35$ кДж/К^2.

7-13. Вблизи тройной точки давление p насыщенного пара двуокиси углерода зависит от температуры T как $\lg(p/p_0) = a - b/T$, где $p_0 = 1$ атм, a и b – постоянные. Если p измеряется в атмосферах, то для процесса сублимации $a = 9{,}05$ и $b = 1800$ К, а для процесса испарения $a = 6{,}78$ и $b = 1310$ К. Найти: а) температуру и давление в тройной точке; б) значения удельных теплот сублимации, испарения и плавления вблизи тройной точки.

Ответ: а) 216 К; 5,14 атм; б) 0,783; 0,570 и 0,213 кДж/г соответственно.

7-14. Найти зависимость давления насыщенного пара от температуры при следующих предположениях: 1) пар подчиняется уравнению состояния идеального газа; 2) удельная теплота испарения линейно зависит от температуры: $q = q_0 - aT$; 3) удельный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с удельным объемом насыщенного пара.

Ответ: $p = \mathrm{const}\cdot T^{-\mu a/R}\cdot e^{-q_0\mu/(RT)}$.

7-15. В цилиндре под поршнем находится вода, а над ней — смесь воздуха и насыщенных водяных паров. Начальное давление на поршень равно атмосферному при нормальных условиях. Затем давление на поршень увеличивается в два раза. На сколько процентов изменится парциальное давление воздуха в цилиндре, если его температура $t = 0\,°\mathrm{C}$ сохранится неизменной ? Давление насыщенного водяного пара при нормальных условиях $p_{\text{п}} = 616,6$ Па.

Ответ: увеличится на $p_{\text{атм}}/(p_{\text{атм}} - p_{\text{п}}) = 100,6\%$.

7-16. Кривая плавления гелия-3 проходит через точку $T_1 = 0{,}12$ К; $p_1 = 31$ атм. При каком давлении p_2 будут находиться в равновесии твердая и жидкая фазы гелия-3 при температуре $T_2 = 0{,}42$ К? Найти также уравнение кривой плавления и молярную теплоту перехода в интервале температур $T_1 < T < T_2$, считая, что молярная энтропия жидкого и твердого гелия в этой области $S_{\text{ж}} = RT/T_0$, $S_{\text{тв}} = R\ln 2$, а разность молярных объемов $V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}} = 1{,}25$ см^3/моль. T_0 – постоянная, равная 0,46 К.

$$\textit{Ответ: } p_2 = 28,9 \text{ атм}; \; p = p_1 + \frac{R}{2T_0}\frac{(T^2 - T_1^2) - 2\ln 2\cdot T_0(T - T_1)}{V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}}};$$
$$-0{,}431 \text{ Дж/моль} < q < 0{,}768 \text{ Дж/моль}.$$

7-17. Из тонкостенной металлической сферы выкачали воздух и налили в неё немного воды. При последующем нагревании ещё не вся вода испаряется (но её объём мал по сравнению с объёмом сферы). До какой температуры надо нагреть сферу, чтобы она разорвалась ? Радиус сферы $r = 20$ см, предельное натяжение на разрыв, которое выдерживают её стенки, $\sigma = 100$ Н/см, удельную теплоту испарения воды считать при нагревании неизменной и равной $q = 2250$ кДж/кг, давление воздуха вне сферы $p_{\text{атм}} = 1$ атм.

$$\textit{Ответ: } T = \left[\frac{1}{T_0} - \frac{R}{q\mu}\ln\left(1 + \frac{2\sigma}{rp_{\text{атм}}}\right)\right]^{-1} = 394 \text{ К, где } T_0 = 373 \text{ К}.$$

Тематика задач

(Число, стоящее в скобках около номера задачи, обозначает примерный уровень сложности по восьмибалльной шкале)

Уравнение состояния идеального газа

1-1 - УС	(2)	1-7 - ГП	(3)	1-13 - УС,ЗД	(3)
1-2 - УС,ЗД	(2)	1-8 - УС,ГП	(3)	1-14 - УС	(4)
1-3 - УС,ЗД	(2)	1-9 - УС,ГП	(3)	1-15 - УС,ЗД	(4)
1-4 - ГП	(3)	1-10 - ОТ,ГП	(3)	1-16 - УС	(5)
1-5 - УС	(3)	1-11 - УС	(3)	1-17 - УС,ГП	(5)
1-6 - ГП	(3)	1-12 - УС	(3)	1-18 - УС,ПР	(6)

Первое начало термодинамики

2-1 - СЭ	(1)	2-25 -ТГ,АД	(3)	2-49 - ПП,ТП	(3)
2-2 - СЭ	(1)	2-26 - ТП	(3)	2-50 - РБ,АД	(3)
2-3 - СЭ	(1)	2-27 - ПП,ТП	(3)	2-51 - ПН,РБ	(3)
2-4 - ПН	(1)	2-28 - РБ	(3)	2-52 - ТП	(3)
2-5 - КТ,ПН	(1)	2-29 - РБ	(3)	2-53 - ТП,УС	(3)
2-6 - АД	(1)	2-30 - ГП,ПН	(3)	2-54 - РБ,ПН,УП	(4)
2-7 - ПН	(1)	2-31 - УП,КТ	(3)	2-55 - ТГ,СЭ,АД	(4)
2-8 - ПН	(1)	2-32 - РБ,ГП	(3)	2-56 - КТ,АД,ПН	(4)
2-9 - ПН	(1)	2-33 - ТП,ПН	(3)	2-57 - КТ,ТП	(4)
2-10 - АД,ГП	(1)	2-34 - РБ,ГП	(3)	2-58 - ТГ,АД	(4)
2-11 - ПН,ГП	(1)	2-35 - АД,СЭ	(3)	2-59 - ТП	(4)
2-12 - РБ,ВЭ	(1)	2-36 - ТП	(3)	2-60 - РБ,АД,УП	(4)
2-13 - ТА	(2)	2-37 - ТП	(3)	2-61 - ТП,ТР	(4)
2-14 - ПП,ТП	(2)	2-38 - УП,ТП	(3)	2-62 - ТП,РБ,ВЭ	(4)
2-15 - ВЭ,СМ	(2)	2-39 - СЭ,УС	(3)	2-63 - СЭ,АД	(5)
2-16 - ТП,КТ	(2)	2-40 - КТ,ПН	(3)	2-64 - УП,ТП	(5)
2-17 - ГП,АД	(2)	2-41 - ПН,УС	(3)	2-65 - АТ,УС	(5)
2-18 - РБ,ПП	(2)	2-42 - ТГ,АД	(3)	2-66 - ГП,ПН	(5)
2-19 - РБ	(2)	2-43 - ПН,РБ	(3)	2-67 - ТГ,АД	(5)
2-20 - РБ,ПН	(2)	2-44 - ТП,ПП	(3)	2-68 - КО,АД,ГП	(6)
2-21 - ЧС,ПН	(2)	2-45 - ТП,ПП	(3)	2-69 - ПН,УС	(6)
2-22 - УС,ВЭ	(2)	2-46 - РБ,ПН	(3)	2-70 - УП	(7)
2-23 - УС,АТ	(3)	2-47 - КТ,РБ	(3)	2-71 - ТП,АТ	(7)
2-24 - ТГ	(3)	2-48 - ТП,КТ	(3)		

Второе начало термодинамики

3-1 - ЭН	(1)	3-10 - ЭН,ПН	(2)	3-19 - ЭН,СЭ	(3)
3-2 - ЭН	(1)	3-11 - ЭН,УП	(3)	3-20 - ЭН	(3)
3-3 - ЭН	(1)	3-12 - ЭН,УП,ПН	(3)	3-21 - ЭН,КТ,ПН	(3)
3-4 - ЭН	(1)	3-13 - ЭН,СЭ	(3)	3-22 - ЭН,СЭ	(4)
3-5 - ЭН	(1)	3-14 - ЭН,УС	(3)	3-23 - ЭН,КТ	(4)
3-6 - ЭН,РБ	(1)	3-15 - ЭН,ГП	(3)	3-24 - ЭН,ВЭ,АД	(4)
3-7 - ЭН	(1)	3-16 - ЭН,ГП	(3)	3-25 - ЭН,РБ,ПН	(4)
3-8 - ЭН	(2)	3-17 - ЭН,ПП	(3)	3-26 - ЭН,ВН	(4)
3-9 - ЭН,УС	(2)	3-18 - ЭН,ПН	(3)	3-27 - ЭН,РБ	(5)

Циклические процессы

4-1 - ОЦ,ЦК (1)	4-15 - КД,ЭН (2)	4-29 - КД,ГП (4)
4-2 - КД,ЦК (1)	4-16 - КД,АД (2)	4-30 - КД,РБ (3)
4-3 - РБ,ЭН (1)	4-17 - КД,АД (2)	4-31 - КД,ГП (3)
4-4 - ОЦ,ЦК (1)	4-18 - КД,ГП (2)	4-32 - ЭН,ВН,ПН (3)
4-5 - ОЦ,ЦК (1)	4-19 - КД (3)	4-33 - КД,АД (3)
4-6 - КД (1)	4-20 - КД,АД (3)	4-34 - КД,ПН (3)
4-7 - КД,ЭН (1)	4-21 - КД,ГП (3)	4-35 - КД,ГП (3)
4-8 - ЦК,КД (2)	4-22 - КД,ГП (3)	4-36 - КД,ГП (4)
4-9 - ОЦ,ЦК (2)	4-23 - КД,ГП (3)	4-37 - КД,ПП,АД (4)
4-10 - ПН,РБ (2)	4-24 - КД,ГП (3)	4-38 - ЦК,КД (4)
4-11 - КД,ЦК (2)	4-25 - КД,АД (3)	4-39 - КД,АД (4)
4-12 - РБ (2)	4-26 - КД,ГП (3)	4-40 - РБ,ЦК (4)
4-13 - КД,ПН (2)	4-27 - КД,ГП (3)	4-41 - КД,ГП (5)
4-14 - КД,АД (2)	4-28 - КД,ГП (3)	4-42 - КД,АД,ТП (5)

Ван-дер-ваальсовский газ

5-1 - ПН,ВВ (1)	5-5 - ПН,СЭ (2)	5-9 - НГ,ПН (3)
5-2 - ВВ,УС (1)	5-6 - ВВ (2)	5-10 - НГ,АД,ПН (3)
5-3 - ВЭ,ВВ,СЭ (2)	5-7 - ПВ,ВВ (3)	5-11 - ВВ,ТП,ПН (4)
5-4 - ЭН,ВВ (2)	5-8 - ВВ,АД (3)	

Жидкости. Поверхностное натяжение. Капиллярные явления

6-1 – НП,КЯ (1)	6-8 – КЯ (2)	6-15 – КЯ,ПЗ (4)
6-2 – НП,КЯ (2)	6-9 – НП,КЯ (3)	6-16 – КЯ (4)
6-3 – СП (2)	6-10 – НП,КЯ (3)	6-17 – КЯ,НП (5)
6-4 – НП,КЯ (2)	6-11 – НП,КЯ (3)	6-18 – КЯ,ТП,УС (6)
6-5 – НП,КЯ (2)	6-12 – СП,ПН,ЭН (3)	6-19 – НП,КЯ (7)
6-6 – КЯ (2)	6-13 – СП,ТБ (3)	6-20 – КЯ (8)
6-7 – КЯ (2)	6-14 – НП,КЯ (4)	

Фазовые превращения

7-1 – ИЗ,УС (1)	7-7 – КК,ТБ (3)	7-13 – КК,ТТ (4)
7-2 – ИЗ,ЦК (1)	7-8 – КК,УС (3)	7-14 – КК (4)
7-3 – ИЗ (1)	7-9 – КК,ТТ (3)	7-15 – ИЗ,УС (4)
7-4 – КК (3)	7-10 – КК,ТТ (3)	7-16 – КК,ЭН (5)
7-5 – КК (3)	7-11 – КК,ТП,УС (4)	7-17 – КК,НП (6)
7-6 – КК (3)	7-12 – КК,УС (4)	

Пояснения к аббревиатуре

АД – адиабатический процесс, уравнение Пуассона,
АТ – атмосфера, барометрическая формула,
ВВ – уравнение Ван дер Ваальса,
ВН – второе начало термодинамики,
ВЭ – вычисление внутренней энергии,
ГП – процессы в газах,
ЗД – закон Дальтона,
ИЗ – изотермы фазового перехода,
КД – к.п.д. цикла,
КК – уравнение Клапейрона–Клаузиуса,
КО – колебания поршня в цилиндре с газом,
КТ – вычисление количества тепла,
КЯ – капиллярные явления,
НГ – неидеальный газ (не ван-дер-ваальсовское уравнение состояния),
НП – поверхностное натяжение,
НР – насыщенный пар,
ОЦ – обратный цикл,
ПВ – постоянные Ван-дер-Ваальса,
ПЗ – уравнение Пуазейля,
ПН – первое начало термодинамики,
ПП – политропические процессы,
РБ – вычисление работы,
РФ – равновесие фаз,
СП – теплота образования поверхности раздела двух фаз,
СТ – вычисление числа степеней свободы,
СЭ – сохранение энергии,
ТБ – уравнение теплового баланса,
ТГ – течение газа,
ТП – вычисление теплоемкостей,
ТР – тепловое расширение,
ТТ – тройная точка,
УП – вывод уравнения процесса,
УС – уравнение состояния идеального газа,
ЦК – цикл Карно,
ЭН – вычисление энтропии.

Глава 3.

Молекулярная физика

8 Распределение Ма́ксвелла

Распределением Максвелла называется распределение по скоростям частиц (молекул) системы, находящейся в статистическом равновесии в отсутствии внешнего поля при условии, что движение частиц подчиняется законам классической механики. Оно не зависит от взаимодействия между молекулами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей (если для них возможно классическое описание).

Согласно распределению Максвелла вероятность того, что проекции скорости молекулы лежат в интервалах от v_x до $v_x + dv_x$, от v_y до $v_y + dv_y$, и от v_z до $v_z + dv_z$

$$d\mathcal{P}(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x\, dv_y\, dv_z\,. \qquad (3.1)$$

Поэтому среднее (с точностью до флуктуаций) число частиц, проекции скоростей которых лежат в указанных интервалах,

$$dN(v_x, v_y, v_z) = N\, d\mathcal{P}(v_x, v_y, v_z)\,, \qquad (3.2)$$

где N – полное число частиц в системе. Вместо N можно записать и n – концентрацию частиц, когда речь идет о единице объема системы. В формуле (3.1) m – масса одной частицы, T – температура системы, а $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Из распределения (3.1) следует: вероятность того, что модуль скорости частицы лежит в интервале от v до $v + dv$ (независимо от направления скорости),

$$d\mathcal{P}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv\,. \qquad (3.3)$$

Это – распределение Максвелла по величинам скоростей. Его можно записать в виде, аналогичном выражению (3.2):

$$dN(v) = N d\mathcal{P}(v)\,.$$

Распределения (3.1) и (3.3) отнормированы на единицу, т.е.

$$\int_0^\infty d\mathcal{P}(v) = 1\,. \qquad (3.4)$$

Формула (3.4) называется условием нормировки.

Поэтому среднее значение любой величины, являющейся функцией скорости, например $\varphi(v)$, вычисляется как

$$\langle\varphi(v)\rangle = \int\limits_0^\infty \varphi(v)d\mathcal{P} \Big/ \int\limits_0^\infty d\mathcal{P} = \int\limits_0^\infty \varphi(v)d\mathcal{P}\,. \tag{3.5}$$

Можно записать максвелловское распределение частиц по импульсам; для этого достаточно в распределении (3.3) сделать подстановку $v = p/m$, что дает:

$$d\mathcal{P}(p) = \frac{4\pi}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) p^2 dp\,. \tag{3.6}$$

Можно записать максвелловское распределение частиц по энергиям. Для этого следует в распределении (3.3) сделать подстановку $mv^2/2 = E$ и $dv = dE\big/\sqrt{2mE}$. В результате получим:

$$d\mathcal{P}(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\sqrt{E}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE\,. \tag{3.7}$$

Но наиболее важным для практического применения является максвелловское распределение частиц по безразмерным скоростям $u = v/v_\text{в}$, где $v_\text{в} = \sqrt{2kT/m}$ – наиболее вероятная скорость. Подставляя в (3.3) $v = uv_\text{в}$, находим

$$d\mathcal{P}(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\exp(-u^2)u^2\,du\,. \tag{3.8}$$

Функция распределения $f(u) = d\mathcal{P}/du = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}u^2\exp(-u^2)$ не зависит явно ни от T, ни от m, т.е. для всех видов частиц является универсальной функцией; поэтому она особенно удобна при решении задач. В литературе имеются таблицы и графики этой функции, а также связанной с ней функции

$$F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int\limits_u^\infty \xi^2\exp(-\xi^2)\,d\xi$$

– относительным числом частиц, скорости которых превосходят заданное значение безразмерной скорости u (например, [3, таблица 11]).

Задача 8.1

Найти среднее число молекул, компоненты скорости которых, параллельные некоторой оси, лежат в интервале $(v_\parallel,\ v_\parallel + dv_\parallel)$, а абсолютные значения перпендикулярной составляющей скорости заключены между $v_\perp$ и $v_\perp + dv_\perp$.

Решение

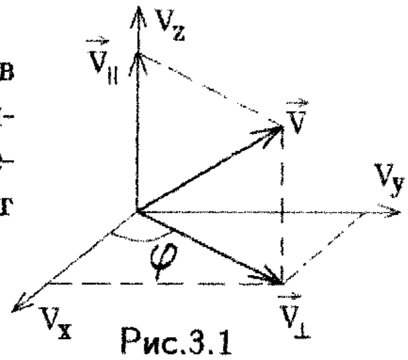

Рис.3.1

Чтобы записать функцию распределения в других переменных, следует использовать инвариантность условия нормировки (3.4). Перейдём в пространстве скоростей (рис.3.1) от переменных v_x , v_y и v_z к переменным

$v_x = v_\perp \cos\varphi$; $v_y = v_\perp \sin\varphi$; $v_z = v_\parallel$.

Совершая замену переменных в условии нормировки вероятности и вычисляя интеграл по углам φ в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, получаем:

$$\iiint d\mathcal{P}(v_x, v_y, v_z) dv_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= \iint \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v_\perp dv_\perp dv_\parallel \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \iint d\mathcal{P}(v_\perp, v_\parallel) dv_\perp dv_\parallel = 1\,,$$

где $d\mathcal{P}(v_\perp, v_\parallel)$ – распределение Максвелла по проекциям скоростей $v_\perp$ и $v_\parallel$. Следовательно, искомое число молекул будет равно

$$dN = N d\mathcal{P}(v_\perp, v_\parallel) = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 2\pi v_\perp dv_\perp dv_\parallel\,.$$

Задача 8.2

Вычислить скорость v_0 теплового движения молекул газа – такую, что половина молекул движется со скоростями, большими v_0 , а другая половина – со скоростями, меньшими v_0 .

Решение

Полагая распределение по скоростям максвелловским и используя формулу (3.8), можно записать условие задачи в виде

$$\int\limits_0^{u_0} \exp(-u^2) u^2\, du = \int\limits_{u_0}^{\infty} \exp(-u^2) u^2\, du\,, \qquad (3.9)$$

где $u_0 = v_0/v_B$. Так как

$$\int\limits_0^{u_0} \exp(-u^2) u^2\, du = \int\limits_0^{\infty} \exp(-u^2) u^2\, du - \int\limits_{u_0}^{\infty} \exp(-u^2) u^2\, du\,,$$

а из условия нормировки распределения (3.8) $\int\limits_0^{\infty} d\mathcal{P}(u) = 1$ следует, что $\int\limits_0^{\infty} \exp(-u^2) u^2\, du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$, то уравнение (3.9) принимает вид

$$2\int_{u_0}^{\infty} \exp(-u^2)u^2\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{или}$$

$$F(u_0) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{u_0}^{\infty} \exp(-u^2)u^2\,du = 0,5\,. \qquad (3.10)$$

Левая часть последнего уравнения, являющаяся функцией u_0, табулирована [3, таблица 11]. Проводя линейную интерполяцию, находим

$$u_0 = 1,091 \;\text{ или }\; v_0 = 1,091 v_{\text{в}}\,.$$

Можно произвести более точные вычисления, используя таблицы интеграла ошибок

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-u^2)du\,,$$

приведенные в [5] или в [22] (таблицы 18.8-10). Учтем, что

$$\int_{u_0}^{\infty} \exp(-u^2)u^2\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \int_0^{u_0} \exp(-u^2)u^2\,du\,.$$

С другой стороны, интегрируя по частям $\Phi(x)$, получаем:

$$\int_0^x \exp(-u^2)u^2\,du = \frac{1}{2}\int_0^x u\,\exp(-u^2)du^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(x) - x\exp\left(-x^2\right)\right].$$

В результате, вместо уравнений (3.9) и (3.10), имеем уравнение

$$\Phi(u_0) = 0,5 + \left(2/\sqrt{\pi}\right)\cdot u_0\exp\left(-u_0^2\right),$$

позволяющее найти более точное значение $u_0 = 1,088$. Следовательно,

$$v_0 = 1,088\,v_{\text{в}} = 1,088\cdot\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,.$$

Задача 8.3

Какая часть молекул в молекулярном пучке имеет скорости, лежащие в интервале от $v_{\text{в}}$ до $2v_{\text{в}}$, где $v_{\text{в}}$ – наиболее вероятная скорость в молекулярном пучке ? Распределение по скоростям в таком пучке отличается от распределения (3.3) и имеет вид

$$dN(v) = N\cdot Av^3\exp(-mv^2/2kT)\,dv\,,$$

где A – постоянная нормировки.

Решение

Сначала определяем наиболее вероятную скорость молекул в пучке из условия $df/dv = 0$, где $f(v) = Av^3\exp(-mv^2/2kT)$ – плотность вероятности. Это дает

$$v_{\text{в}} = \sqrt{3kT/m}\,.$$

Теперь отнормируем функцию $f(v)$, т.е. определим постоянную A из условия нормировки

$$\int_0^\infty d\mathcal{P}(v) = \int_0^\infty f(v)\,dv = 1\,.$$

Проводим несложные вычисления, используя дифференцирование интеграла по параметру

$$A\int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\,dv = \frac{A}{2}\int_0^\infty \xi\exp(-\alpha\xi)\,d\xi =$$

$$= -\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\int_0^\infty \exp(-\alpha\xi)\,d\xi\right) = -\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{A}{2\alpha^2} = 1\,,$$

где использованы обозначения: $\alpha = m/2kT$ и $\xi = v^2$. Таким образом, $A = 2\alpha^2 = 0,5(m/kT)^2$.

Для удобства перейдём к безразмерной скорости $u = v/v_{\text{в}}$ в распределении по скоростям. Подстановка $v = uv_{\text{в}}$ дает

$$dN(u) = N\cdot 4,5u^3\exp(-1,5u^2)\,du\,.$$

В итоге находим искомую величину

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{9}{2}\int_1^2 u^3\exp\left(-\frac{3}{2}u^2\right)\,du = \frac{9}{4}\int_1^4 \zeta\exp\left(-\frac{3}{2}\zeta\right)\,d\zeta\,,$$

где использовано обозначение $\zeta = u^2$. Интегрируя по частям последний интеграл, получаем окончательно

$$\Delta N/N = 2,5\exp(-1,5) - 7\exp(-6) = 0,54 = 54\%\,.$$

Задача 8.4

Найти вероятность того, что две частицы имеют величину относительной скорости $v' = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$, лежащую в интервале от v' до $v' + dv'$. Вычислить среднюю относительную скорость.

Решение

Пусть газ состоит из молекул двух сортов с массами m_1 и m_2. Будем искать среднюю относительную скорость молекул разных сортов. Если в конечном результате положить $m_1 = m_2$, то получим относительную скорость молекул одного сорта.

Вероятность того, что одна молекула – назовем ее молекулой 1 – имеет скорость, лежащую в интервале от $\vec{v}_1$ до $\vec{v}_1 + d\vec{v}_1$, и одновременно другая молекула 2 имеет скорость, лежащую в интервале от $\vec{v}_2$ до $\vec{v}_2 + d\vec{v}_2$ с учётом (3.1) и согласно теореме умножения вероятностей будет

$$dP(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = dP(\vec{v}_1)\cdot dP(\vec{v}_2) = \left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_1 v_1^2}{2kT}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}\right) dv_{1x}\,dv_{1y}\,dv_{1z}\,dv_{2x}\,dv_{2y}\,dv_{2z}\ . \qquad (3.11)$$

Введем новые переменные: скорость второй молекулы относительно первой $\vec{v}\,' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ и скорость центра масс двух этих молекул $\vec{v}_C \equiv \vec{v}_0 = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)\big/(m_1+m_2)$. Распределение (3.11) в новых переменных должно быть по-прежнему нормировано на единицу (формула (3.4)). Поэтому при такой замене переменных мера интегрирования преобразуется, как

$$dv_{0x}\,dv'_x = \frac{\partial(v_{0x}\,,v'_x)}{\partial(v_{1x}\,,v_{2x})}\,dv_{1x}\,dv_{2x}\ ,$$

где якобиан преобразования

$$\frac{\partial(v_{0x}\ ,\ v'_x)}{\partial(v_{1x}\ ,\ v_{2x})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_{0x}}{\partial v_{1x}} & \dfrac{\partial v'_x}{\partial v_{1x}} \\ \dfrac{\partial v_{0x}}{\partial v_{2x}} & \dfrac{\partial v'_x}{\partial v_{2x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & -1 \\ \dfrac{m_2}{m_1+m_2} & +1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

То же относится и к двум другим произведениям $dv_{1y}\,dv_{2y}$ и $dv_{1z}\,dv_{2z}$. Поэтому

$$dv_{1x}\,dv_{1y}\,dv_{1z}\cdot dv_{2x}\,dv_{2y}\,dv_{2z} = dv_{0x}\,dv_{0y}\,dv_{0z}\cdot dv'_x\,dv'_y\,dv'_z\ .$$

Далее, обозначая общую массу системы через M и учитывая, что $m_1 m_2 = Mm'$, находим

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = Mv_0^2 + m'v'^{\,2}\,.$$

В результате этих преобразований получаем

$$dP(\vec{v}_0,\vec{v}\,') = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{Mv_0^2}{2kT}\right) dv_{0x}\,dv_{0y}\,dv_{0z}\,\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{m'}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m'v'^{\,2}}{2kT}\right) dv'_x\,dv'_y\,dv'_z\ .$$

Интегрирование этого выражения по всем возможным значениям $v_{0x}\ ,v_{0y}\ ,v_{0z}$, т.е. от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом того, что интеграл Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\,-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (3.12)$$

и, следовательно,

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{M}{2kT}\left(v_{0x}^2+v_{0y}^2+v_{0z}^2\right)\right) dv_{0x}\,dv_{0y}\,dv_{0z} = \left(\frac{2\pi kT}{M}\right)^{3/2},$$

приводит к распределению молекул по проекциям относительных скоростей

$$dP(\vec{v}\,') = \left(\frac{m'}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m'v'^2}{2kT}\right) dv'_x\, dv'_y\, dv'_z\ .$$

Теперь остается перейти к модулю относительной скорости, для чего введём сферические координаты в пространстве скоростей (как это сделано в задаче 9.1). Интегрируя по всем значениям углов φ и θ (рис.3.2), находим:

$$dP(v') = 4\pi \left(\frac{m'}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m'v'^2}{2kT}\right) v'^2 dv'\,.$$

Это и есть искомое распределение. Из него, в частности, следует, что

$$\langle v'\rangle = \int_0^\infty v' dP(v') = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m'}}\,,$$

и, если массы молекул одинаковы, т.е. $m' = m^2/2m = m/2$, то

$$\langle v'\rangle = \sqrt{16kT/\pi m} = \sqrt{2}\,\langle v\rangle\ . \tag{3.13}$$

9 Применение распределения Максвелла. Плотность потока молекул. Эффузия

С помощью распределения Максвелла можно вычислить целый ряд физических величин, важных для приложений, – одной из них является плотность потока молекул j_0, т.е. число молекул, пролетающих вследствие хаотического движения за 1 с через единичную площадку в одном направлении. Расчет (смотри ниже) показывает, что

$$j_0 = n\,\langle v\rangle\,/4\,, \tag{3.14}$$

где n – концентрация молекул, а $\langle v\rangle$ – средняя скорость молекулы.

Очевидно, что точно таким же будет и плотность потока молекул, ударяющихся о стенку. Если в стенке тонкостенного сосуда имеется достаточно малое отверстие, то газ будет медленно вытекать из него – это явление называется эффузией. Конечно, формула (3.14) справедлива только, если диаметр отверстия мал по сравнению со средней длиной свободного пробега; в противном случае вытекание газа происходит по законам гидродинамики.

Задача 9.1

Вывести формулу (3.14).

Решение

При решении этой и многих других аналогичных задач удобно использовать сферические координаты в пространстве скоростей: v, θ и φ. Как следует из рис.3.2,

$v_z = v\cos\theta\,, v_x = v\sin\theta\cos\varphi\,, v_y = v\sin\theta\sin\varphi\,.$ Элемент объема пространства скоростей в сферических координатах равен, как известно,

$$dV = v^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi dv\,.$$

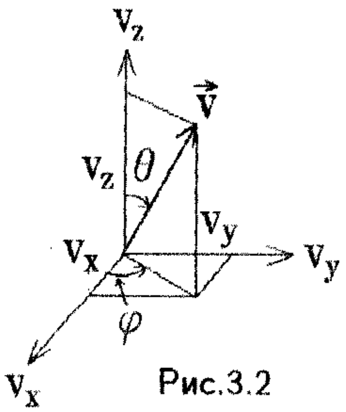

Рис.3.2

Рассмотрим единичную площадку S перпендикулярную к оси z (рис.3.3). За 1 с через S слева направо пройдут те молекулы со скоростями от $\vec{v}$ до $\vec{v}+d\vec{v}$, которые находятся в косом цилиндре, изображенном на рис.3.3. Так как объем такого цилиндра равен $v_z \cdot S \cdot 1$ с, а число таких молекул в единице объема определяется, как $nd\mathcal{P}(v_x\,, v_y\,, v_z\,)$, то

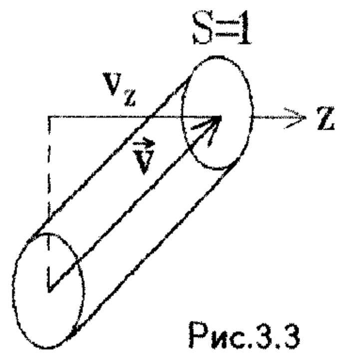

Рис.3.3

$$dj_0 = v_z\, nd\mathcal{P}(v_x\, v_y\, v_z\,) =$$

$$= v_z\, n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x\, dv_y\, dv_z$$

или в сферических координатах

$$dj_0 = v\cos\theta \cdot nd\mathcal{P}(v,\theta,\varphi) =$$

$$= n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \sin\theta\cos\theta\, d\theta d\varphi\,.$$

Интегрируя это выражение по φ в пределах от 0 до 2π, по θ — от 0 до $\pi/2$ (учитывая, что $v_z > 0$) и по v — от 0 до ∞, находим

$$j_0 = \pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = \qquad (3.15)$$

$$= n\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \xi\exp(-\alpha\xi)d\xi = \frac{n\pi}{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{1}{\alpha^2} = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,,$$

где $\xi = v^2$ и $\alpha = m/2kT$. Учитывая, что $\langle v\rangle = \sqrt{8kT/(\pi m)}$, получаем окончательно

$$j_0 = n\langle v\rangle/4\,.$$

Задача 9.2

Найти полную кинетическую энергию молекул, падающих на единицу поверхности стенки сосуда за единицу времени.

Решение

Так как плотность потока молекул со скоростями в интервале от $\vec{v}$ до $\vec{v}+d\vec{v}$ равна $dj_{0z} = v_z\, nd\mathcal{P} = v_z\, dn$, а энергия одной молекулы $E = mv^2/2$, то плотность потока энергии запишется в виде

$$j_E = \iiint \frac{mv^2}{2} v_z \, n d\mathcal{P}(v_x, v_y, v_z) \, .$$

Переходя к сферическим координатам (рис.3.2) и интегрируя по φ, θ и v в тех же пределах, что и в предыдущей задаче, находим

$$j_E = n\frac{m\pi}{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^5 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv =$$

$$= n\frac{m\pi}{4}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty \xi^2 \exp(-\alpha\xi)\, d\xi =$$

$$= n\frac{m\pi}{4}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\int_0^\infty \exp(-\alpha\xi)\, d\xi\right) =$$

$$= n\frac{m\pi}{4} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{\alpha^3} = n\frac{m\pi}{2} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^3 = \frac{n\pi m \langle v\rangle^3}{16} \, .$$

При выводе опять использовались обозначения $\alpha = m/2kT$ и $\xi = v^2$.

Задача 9.3 (Формула Ричардсона)

Считая, что потенциальная энергия электрона внутри металла на $A_{\text{вых}} = e_0\varphi$ меньше, чем вне металла, найти плотность тока термоэлектронной эмиссии. Концентрация электронов n внутри металла известна; e_0 – абсолютная величина заряда электрона; φ – контактный потенциал металла.

Решение

Пусть плоская граница металл – вакуум перпендикулярна к оси x; тогда условие вылета электрона из металла запишется в виде

$$mv^2/2 \geqslant e_0\varphi \, ,$$

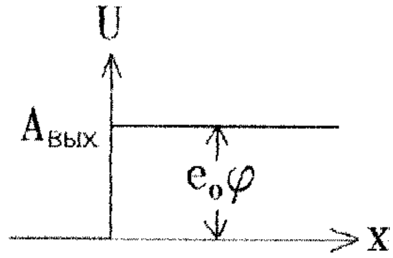

Рис.3.4

так как на границе существует потенциальный барьер высоты $A_{\text{вых}} = e_0\varphi$ (рис.3.4), и при прохождении электрона через него изменяется только одна перпендикулярная составляющая скорости. Поэтому плотность потока электронов через границу определяется так же, как и в задаче 9.1:

$$j_x = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \iiint v_x \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x\, dv_y\, dv_z \, ,$$

где интегрирование по v_y и v_z проводится в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а по v_x — от $v_{0x} = \sqrt{2e_0\varphi/m}$ до $+\infty$, т.е.

$$j_x = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{v_{0x}}^{+\infty} v_x \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right) dv_y \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{2\pi kT}{m}.$$

$$\cdot \int\limits_{v_{0x}}^{+\infty} v_x \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int\limits_{\zeta_0}^{+\infty} \exp(-\alpha\zeta)d\zeta =$$

$$= \frac{n}{2}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha v_{0x}^2) = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \exp\left(-\frac{mv_{0x}^2}{2kT}\right),$$

так как $\alpha = m/2kT$, $\zeta = v_x^2$, а $\zeta_0 = v_{0x}^2$. Подставляя в полученное выражение v_{0x} и умножая его на заряд электрона e_0, получим плотность тока термоэлектронной эмиссии т.е. заряд, протекающий за единицу времени через единицу поверхности металла (формулу Ричардсона):

$$j = e_0 n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \exp\left(-\frac{e_0\varphi}{kT}\right) = \frac{1}{4} e_0 n \langle v\rangle \exp\left(-\frac{A_{\text{вых}}}{kT}\right).$$

Задача 9.4 (Эффузия)

Сосуд разделен перегородкой на две равные части с объемом V каждая. В одной части находится азот, в другой – кислород при одинаковых давлениях p и температурах T. В начальный момент времени $t_0 = 0$ в перегородке открывается малое (в сравнении с длиной свободного пробега) отверстие площадью S. Найти зависимости давлений в обеих частях сосуда от времени.

Решение

Обозначим через $N_{\text{а}}^{(1)}, N_{\text{а}}^{(2)}, N_{\text{к}}^{(1)}, N_{\text{к}}^{(2)}$ числа молекул азота (а) и кислорода (к) в первой и второй половинах сосуда соответственно, $n_i = N_i/V$ – концентрации этих молекул. Согласно формуле (3.14) за время dt на отверстие будет падать $\left(N_{\text{а}}^{(1)}/V\right) \cdot (\langle v_{\text{а}}\rangle/4) \cdot Sdt$ молекул азота из первой половины сосуда и переходить во вторую половину. В обратном направлении из второй половины в первую за то же время перейдёт $\left(N_{\text{а}}^{(2)}/V\right) \cdot (\langle v_{\text{а}}\rangle/4) \cdot Sdt$ молекул азота, и уравнения баланса молекул азота в обеих частях сосуда будут иметь вид:

$$\frac{dN_{\text{а}}^{(1)}}{dt} = -\frac{S\langle v_{\text{а}}\rangle}{4V}\left(N_{\text{а}}^{(1)} - N_{\text{а}}^{(2)}\right),$$

$$\frac{dN_{\text{а}}^{(2)}}{dt} = -\frac{S\langle v_{\text{а}}\rangle}{4V}\left(N_{\text{а}}^{(2)} - N_{\text{а}}^{(1)}\right),$$

причем $N_{\text{а}}^{(1)} + N_{\text{а}}^{(2)} = \text{const} = N_{\text{а}}$. Температуры газов в обеих частях остаются одинаковыми и равными T, так как кинетические энергии молекул азота при пролёте через отверстие не меняются. Поэтому одинаковы в обеих частях сосуда и их средние скорости $\langle v_{\text{а}} \rangle$. Подставляя $N_{\text{а}}^{(2)} = N_{\text{а}} - N_{\text{а}}^{(1)}$, получим для первой половины сосуда уравнение

$$\frac{dN_{\text{а}}^{(1)}}{dt} = -\frac{S\langle v_{\text{а}} \rangle}{2V}\left(N_{\text{а}}^{(1)} - \frac{N_{\text{а}}}{2}\right).$$

Учитывая, что при $t = 0$ $N_{\text{а}}^{(1)} = N_{\text{а}}$, находим его решение:

$$N_{\text{а}}^{(1)} = \frac{1}{2}N_{\text{а}}\Big[1 + \exp(-\alpha_{\text{а}}t)\Big],$$

где $\alpha_{\text{а}} = S\langle v_{\text{а}} \rangle / 2V$.

Для другой половины $N_{\text{а}}^{(2)} = 0$ при $t = 0$ и

$$N_{\text{а}}^{(2)} = \frac{1}{2}N_{\text{а}}\Big[1 - \exp(-\alpha_{\text{а}}t)\Big],$$

Аналогичные выражения получаются и для $N_{\text{к}}^{(1)}$ и $N_{\text{к}}^{(2)}$, но только с заменой индексов (1) на (2) и наоборот и $\alpha_{\text{а}}$ – на $\alpha_{\text{к}} = S\langle v_{\text{к}} \rangle / 2V$.

Так как начальные давления и температуры одинаковы, а $N = nV = pV/kT$, то $N_{\text{а}} = N_{\text{к}} = N$. Поэтому давление в первой половине сосуда

$$p_1 = \Big(N_{\text{а}}^{(1)} + N_{\text{к}}^{(1)}\Big)\cdot(kT/V) = p\Big(1 + 0,5\exp(-\alpha_{\text{а}}t) - 0,5\exp(-\alpha_{\text{к}}t)\Big),$$

а во второй

$$p_2 = \Big(N_{\text{а}}^{(2)} + N_{\text{к}}^{(2)}\Big)\cdot(\kappa T/V) = p\Big(1 + 0,5\exp(-\alpha_{\text{к}}t) - 0,5\exp(-\alpha_{\text{а}}t)\Big).,$$

Задача 9.5

В изолированном отсеке космической станции воздух имеет температуру 20 °С и давление $p_0 = 1$ атм. Объём отсека $V = 25$ м^3. Метеорит пробивает в стенке отсека небольшое отверстие с площадью $S = 10$ см^2. Оценить время, за которое находящийся в отсеке космонавт должен надеть скафандр с автономной подачей воздуха для дыхания.

Решение

Согласно формуле (3.14) за время dt на отверстие будет падать и вылетать в космос $|dN| = n\langle v \rangle Sdt/4$ молекул воздуха. Пренебрегая столкновениями молекул в узком слое вблизи отверстия, можно считать, что температура воздуха внутри отсека остаётся неизменной. Тогда изменение давления в отсеке за время dt с учётом уравнения состояния идеального газа (1.3) примет вид

$$dp = kT\cdot dn = kT\frac{dN}{V} = -kTn\frac{\langle v \rangle S}{4V}dt = -p\frac{\langle v \rangle S}{4V}dt.$$

При резком понижении давления воздуха на $\Delta p \sim 0,1p_0$ парциальное давление кислорода в нём становится недостаточным для внедрения кислорода в капилляры системы кровообращения, и человек теряет со-знание из-за кислородного голодания мозга. Поэтому предельное время, за которое космонавт должен загерметизировать скафандр, можно найти, интегрируя полученное выше уравнение:

$$\int\limits_{p_0}^{p_0-\Delta p} \frac{dp}{p} = -\frac{\langle v\rangle S}{4V}\int\limits_0^t dt\,, \text{ откуда } t = \frac{4V}{\langle v\rangle S}\ln\left(\frac{p_0}{p_0-\Delta p}\right) \lesssim 23 \text{ с}$$

после подстановки средней скорости молекул воздуха $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu_{\text{возд}}}}$.

10 Степени свободы газовых молекул. Распределение энергии по степеням свободы

Система из N упруго связанных между собой материальных точек имеет $3N$ степеней свободы. Координатам центра масс соответствуют 3 поступательных степени свободы, а углам – 3 вращательных. Поэтому число колебательных степеней свободы системы равно $i_{\text{кол}} = 3N-6$ (или $i_{\text{кол}} = 3N-5$, если все N точек лежат на одной прямой).

Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы утверждает, что на каждую степень свободы поступательного и вращательного движений приходится в среднем одинаковая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы – энергия вдвое большая, т.е. kT. Следовательно, средняя энергия одной молекулы

$$\langle E\rangle = ikT/2\,, \tag{3.16}$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол}}$. Заметим, что колебательные степени свободы молекул надо принимать во внимание только при достаточно большой температуре газа, например, при $T \gtrsim 2200$ К для кислорода. Вращательные степени свободы исчезают при очень низких температурах, для кислорода это $T \lesssim 2,1$ К.

Задача 10.1

Найти степень диссоциации молекул азота, если известно, что для него отношение $\gamma = C_p/C_V = 1,47$.

Решение

Сначала вычислим γ для смеси, состоящей из ν_1 молей одноатомного газа ($i_1 = 3$) и ν_2 молей двухатомного газа ($i_2 = 5$).

По определению $\gamma = C_p/C_V = (C_V + R)/C_V = 1 + R/C_V$. Но

$$C_V = \frac{dU_{\text{мол}}}{dT} = \frac{d}{dT}\left(\frac{\nu_1\cdot 1,5RT + \nu_2\cdot 2,5RT}{\nu_1+\nu_2}\right) = R\frac{1,5\nu_1 + 2,5\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\,.$$

Поэтому

$$\gamma_{\text{смеси}} = 1 + \frac{\nu_1+\nu_2}{1,5\nu_1 + 2,5\nu_2}\,.$$

Так как $\nu = N/N_{\text{Ав}} = nV/N_{\text{Ав}}$, где N – число молекул газа, n – концентрация молекул, а V - объем газа, то

$$\gamma_{\text{смеси}} = 1 + \frac{n_1 + n_2}{1,5n_1 + 2,5n_2},$$

где n_1 и n_2 – концентрации атомов и молекул азота соответственно. Отсюда, зная, что $\gamma_{\text{смеси}} = 1,47$, можно найти отношение n_2/n_1, которое оказывается равным 1,6857.

Наконец, степень диссоциации ϑ – это отношение числа диссоциировавших молекул к полному числу молекул, т.е.

$$\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{n_1}{n_2 + n_1/2} = \frac{1}{2n_2/n_1 + 1} = 0,229 = 22,9\%.$$

Задача 10.2

Найти среднюю квадратичную угловую скорость вращения молекулы азота при температуре 300 К, зная, что расстояние между центрами атомов в молекуле $b = 0,37$ нм.

Решение

По теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы

$$\left\langle \frac{I\omega^2}{2} \right\rangle = kT,$$

так как двухатомная молекула имеет 2 вращательных степени свободы. Учитывая, что момент инерции "гантели" $I = mb^2/4$, находим

$$\omega_{\text{кв}} = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2kT}{I}} = \sqrt{\frac{8kT}{mb^2}} = \sqrt{\frac{8RT}{\mu b^2}} = 2,28 \cdot 10^{12}\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 10.3

Из скольких атомов состоят молекулы газа, если при "замораживании" колебательных степеней свободы показатель адиабаты для этого газа γ увеличивается в 1,2 раза ?

Примечание: "замораживание" является чисто квантовым эффектом, поэтому, не останавливаясь на природе этого явления, заметим, что при определенных критических температурах, различных для разных газов, исчезают сначала колебательные, а затем и вращательные степени свободы.

Решение

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{6 + 2i_{\text{кол}} + 2}{6 + 2i_{\text{кол}}} = \frac{4 + i_{\text{кол}}}{3 + i_{\text{кол}}}.$$

Если $i_{\text{кол}} = 0$, то $\gamma_1 = 1,2\gamma = 1,2 \cdot (4 + i_{\text{кол}})/(3 + i_{\text{кол}})$, но, с другой стороны, $\gamma_1 = (6+2)/6 = 4/3$. Отсюда находим $i_{\text{кол}} = 6$ и, следовательно,

$$N = 4\,.$$

Другая возможность (линейная молекула), для которой число колебательных степеней свободы $i_{\text{кол}} = 3N - 5$, в условиях данной задачи не реализуется, так как для газа из линейных молекул

$$\gamma = \frac{5 + 2i_{\text{кол}} + 2}{5 + 2i_{\text{кол}}}\,,\quad \gamma_1 = \frac{5+2}{5}\,,$$

и условие $\gamma_1 = 1,2\gamma$ приводит к $i_{\text{кол}} = 7/2$, что невозможно ($i_{\text{кол}}$ должно быть целым числом !).

11 Распределение Больцмана

Статистическое тепловое равновесие возможно не только в изолированной от внешних взаимодействий системе, но и в системе, находящейся во внешнем потенциальном поле, причем поле не влияет на температуру системы. Иначе говоря, если статистическая система, подчиняющаяся законам классической механики, находится во внешнем потенциальном поле, то распределение частиц по скоростям будет максвелловским, а концентрация частиц в точке $\vec{r}$ определяется распределением Больцмана,

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{kT}\right)\,, \tag{3.17}$$

где $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия одной молекулы, а n_0 – концентрация частиц в такой точке $\vec{r}_0$, в которой $U(\vec{r}_0) = 0$.

Можно записать распределение Больцмана в несколько ином виде: число частиц в бесконечно малом объеме dV (в декартовых координатах $dV = dxdydz$)

$$dN(\vec{r}) = A \exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{kT}\right) dV\,, \tag{3.18}$$

где A – постоянная нормировки.

Заметим, что рассмотренная в главе 1 барометрическая формула является частным случаем распределения Больцмана.

<u>Задача 11.1</u>

Идеальный газ помещён в вертикальный цилиндр, имеющий высоту h и радиус r_0. Газ вместе с цилиндром вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис.3.5). Найти давление газа на боковую стенку цилиндра. Общее число молекул газа в цилиндре N, температура газа T, а влиянием поля тяжести можно пренебречь.

Решение

Газ находится в поле центробежных сил $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{r}$, где r – расстояние от оси цилиндра. Поэтому потенциальная энергия молекулы

$$U = -m\omega^2 r^2/2\,.$$

Согласно распределению (3.18) в элементе объема $2\pi r dr dz$, изображенном на рис.3.5, будет находиться

$$dN(r,z) = A\exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right)2\pi r dr dz$$

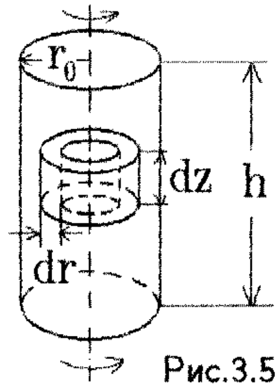

Рис.3.5

молекул, где постоянная A определяется из условия нормировки:

$$N = \int dN(r,z) = A\int\limits_0^h dz\int\limits_0^{r_0} 2\pi r dr\exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) =$$

$$= A\pi h\int\limits_0^{\xi_0}\exp\left(\frac{m\omega^2\xi}{2kT}\right)d\xi = A\pi h\frac{2kT}{m\omega^2}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 r_0^2}{2kT}\right) - 1\right],$$

(здесь $\xi = r^2$ и $\xi_0 = r_0^2$), откуда следует

$$A = \frac{m\omega^2 N}{2\pi kTh[\exp(m\omega^2 r_0^2/2kT) - 1]}\,.$$

Так как $n(r) = dN(r,z)/dV = dN(r,z)/2\pi r dr dz = A\exp(m\omega^2 r^2/2kT)$, то распределение концентрации в зависимости от расстояния r до оси цилиндра определяется выражением:

$$n(r) = \frac{m\omega^2 N}{2\pi kTh}\cdot\frac{\exp(m\omega^2 r^2/2kT)}{\exp(m\omega^2 r_0^2/2kT) - 1}\,.$$

Поэтому согласно уравнению состояния идеального газа (1.3) давление на боковую стенку цилиндра будет

$$p(r_0) = n(r_0)kT = \frac{Nm\omega^2}{2\pi h}\cdot\frac{1}{1 - \exp(-m\omega^2 r_0^2/2kT)}\,.$$

Задача 11.2

Стратосфера начинается на высоте $h_C = 11$ км над поверхностью Земли. Во сколько раз плотность атмосферы на высоте $h = 25$ км меньше, чем у поверхности Земли ? Атмосферу считать идеальным газом с молярной массой $\mu = \mu_{возд} = 29$ г/моль.

Решение

На больших высотах потенциальную энергию молекулы уже нельзя вычислять по формуле $U = mgh$. Следует учитывать изменение силы тяжести с высотой и пользоваться общим выражением для потенциальной энергии в гравитационном поле

$$U = -G\frac{mM_З}{R_З + h} + \text{const}\,, \tag{3.19}$$

где $M_З$ – масса Земли, $R_З$ – радиус Земли, а константа определяется из условия: $U = 0$ при $h = 0$, т.е. $\text{const} = GmM_З/R_З$, и

$$U = G\frac{mM_З}{R_З}\left(1 - \frac{R_З}{R_З + h}\right) = m\frac{GM_З}{R_З^2}\cdot\frac{hR_З}{R_З + h} = mg\frac{hR_З}{R_З + h}\,.$$

Распределение Больцмана (3.17) можно записать только для равновесного состояния газа, т.е. для атмосферы, имеющей постоянную температуру $T = \text{const}$. Тогда

$$\rho_{\text{равн}}(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{mghR_З}{kT\,(R_З + h)}\right) =$$

$$= \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu ghR_З}{RT\,(R_З + h)}\right), \tag{3.20}$$

где $\rho_0 = 1,225$ кг/м^3 – плотность сухого воздуха на уровне моря, $T = 288$ К – его средняя температура.

Полученный в (3.20) результат физически неточен, так как при $h \to \infty$ находим $\rho_{\text{равн}} \longrightarrow \rho_0 \exp\left(-\mu gR_З/RT\right) = \rho_0 \exp(-757)$. С такой, хотя и очень малой, но конечной плотностью равновесная атмосфера должна распределиться по всему бесконечному пространству, т.е. улетучиться от Земли.

На самом деле атмосфера Земли неравновесна. В тропосфере её температура падает с ростом высоты h по закону $dT/dh \simeq -0,0065$ К/м и на высоте $h_С \approx 11$ км, где начинается стратосфера, эта температура составляет $T_С = 216,5$ К. На этой высоте плотность воздуха $\rho_С = 0,3639$ кг/м^3 ([7, стр.33]). Температура стратосферы $T_С$ неизменна, начиная с высоты $h = h_С$, и к ней можно применить распределение Больцмана (3.17), считая, что нулевой уровень потенциальной энергии $U = 0$ соответствует высоте $h = h_С$, т.е. в формуле (3.19) $\text{const} = GmM_З/(R_З + h_С)$. Тогда

$$\frac{\rho_{\text{страт}}(h)}{\rho_0} = \frac{\rho_С}{\rho_0}\exp\left(-\frac{U}{kT_С}\right) = \frac{\rho_С}{\rho_0}\exp\left(-\frac{\mu g(h - h_С)}{RT_С}\right) \approx 3,25\cdot 10^{-2}\,.$$

Этот результат также не совсем точен, так как сухой воздух состоит из разных газов, и на высоте $h = 25$ км в атмосфере сохраняются преимущественно самые лёгкие газы с меньшей, чем $\mu_{\text{возд}}$, молярной массой.

Задача 11.3 (Дебаевский радиус)

Небольшое сферическое тело радиуса r_0, потенциал которого φ_0 поддерживается постоянным, помещено в плазму, состоящую из электронов, однозарядных ионов и нейтральных атомов. Температуры электронов и ионов различны и равны соответственно T_e и T_i. Определить дебаевский радиус экранирования.

Решение

Дебаевским радиусом экранирования называется характерное расстояние, на которое внешнее электрическое поле проникает в плазму. В данной задаче — это толщина защитного слоя, который образуется при контакте плазмы с поверхностью рассматриваемого тела. В защитном слое условие квазинейтральности плазмы $n_e \approx n_i$ не соблюдается, поэтому потенциал внутри защитного слоя определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} = \frac{e_0(n_e - n_i)}{\varepsilon_0},$$

где ϱ – плотность электрического заряда, а e_0 – абсолютная величина заряда электрона.

В сферически симметричном случае это уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{e_0}{\varepsilon_0}(n_e - n_i).$$

Так как концентрации заряженных частиц в электрическом поле подчиняются распределению Больцмана (3.17), и в горячей плазме $e_0\varphi/kT \ll 1$, то

$$n_i = n_0 \exp\left(-\frac{e_0\varphi}{kT_i}\right) \approx n_0\left(1 - \frac{e_0\varphi}{kT_i}\right),$$

$$n_e = n_0 \exp\left(+\frac{e_0\varphi}{kT_e}\right) \approx n_0\left(1 + \frac{e_0\varphi}{kT_e}\right),$$

где n_0 – концентрация частиц в невозмущенной плазме ($n_0 = n_{0e} = n_{0i}$). Поэтому потенциал в сферически симметричном защитном слое определяется уравнением

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{n_0 e_0^2}{\varepsilon_0 k}\left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right)\varphi. \tag{3.21}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\alpha}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \tag{3.22}$$

где постоянная α находится из граничных условий: $\varphi = \varphi_0$ при $r = r_0$. Подставляя формулу (3.18) в уравнение (3.17), находим

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_i T_e}{n_0 e_0^2 (T_i + T_e)}} .$$

Это и есть дебаевский радиус экранирования. Как следует из формулы (3.22), на расстоянии λ_D кулоновский потенциал при наличии плазмы убывает в $e = 2,72$ раза, а, например, при $r = 10\lambda_D$ условие квазинейтральности ($n_{0i} \approx n_{0e}$) в газоразрядной плазме выполняется уже с точностью до 1%.

Задача 11.4 (Диэлектрическая восприимчивость)

Найти выражение для диэлектрической восприимчивости газообразного диэлектрика, состоящего из полярных молекул, каждая из которых обладает одинаковым по величине электрическим дипольным моментом p_e.

Решение

Дипольный момент молекулы во внешнем электрическом поле $\vec{E}$ обладает потенциальной энергией

$$U = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} = -p_e E \cos\theta .$$

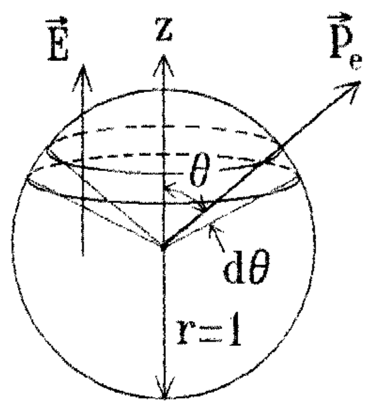

Рис.3.6

Поэтому число молекул-диполей, ориентированных относительно поля в интервале углов от θ до $\theta + d\theta$, определяется согласно распределению Больцмана (3.18) выражением:

$$dN(\theta) = A \exp\left(\frac{p_e E \cos\theta}{kT}\right) 2\pi \sin\theta d\theta ,$$

где θ – азимутальный угол, $2\pi \sin\theta d\theta$ – элемент телесного угла (рис.3.6), A – постоянная нормировки. Вследствие симметрии относительно поля $\vec{E}$, т.е. относительно оси z, среднее значение величины дипольного момента вычисляется по формуле

$$\langle p_e \rangle = \langle p_{ez} \rangle = \int_0^\pi p_z dN(\theta) \Big/ \int_0^\pi dN(\theta) = \int_0^\pi p_e \cos\theta dN(\theta) \Big/ \int_0^\pi dN(\theta) =$$

$$= p_e \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\ln\left(\int_0^\pi \exp(\alpha\cos\theta)\sin\theta d\theta\right)\right] = p_e \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\exp(t)dt\right)\right] =$$

$$= p_e \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\ln\left(\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{\alpha}\right)\right] = p_e\left(\operatorname{cth}\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) ,$$

где в процессе вычислений введены обозначения: $\alpha = p_e E/kT$ и $t = \alpha\cos\theta$. Так как для газов $\alpha = p_e E/kT \ll 1$ и поэтому $\operatorname{cth}\alpha \approx$

$\approx 1/\alpha + \alpha/3$ ([4]), то

$$\langle p_e \rangle = p_e \, \alpha/3 = p_e^2 \, E/3kT \,.$$

Поскольку величина поляризованности диэлектрика

$$P = n \langle p_e \rangle = \varepsilon_0 æ E \,,$$

постольку

$$æ = \frac{n \langle p_e \rangle}{\varepsilon_0 E} = \frac{n p_e^2}{3 \varepsilon_0 kT} \,. \tag{3.23}$$

Это и есть искомое выражение (n – концентрация молекул-диполей).

Совершенно аналогичным образом вычисляется магнитная восприимчивость парамагнетиков. Величина намагниченности парамагнетика определяется как

$$J = n \langle p_m \rangle = \chi B / \mu_0 \,,$$

поэтому μ_0, в отличие от ε_0 в формуле (3.23), будет находиться не в знаменателе, а в числителе выражения для χ: т.е.

$$\chi_{\text{пара}} = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT} \,, \tag{3.24}$$

где p_m – величина магнитного момента одного атома.

Задача 11.5

Найти приближенное выражение для скорости потери планетой ее атмосферы, считая атмосферу равновесной и предполагая, что на расстоянии r_0 от ее центра (рис.3.7) столкновения молекул становятся несущественными. Оценить время потери планетой ее атмосферы.

Решение

Молекулы, подлетающие к сфере радиуса r_0 со скоростью v, будут описывать эллиптическую или гиперболическую орбиту в зависимости от того, будет ли v больше или меньше второй космической скорости в точке r_0, которая, как известно, равна $v_2 = \sqrt{2GM/r_0} = \sqrt{2gR_\text{п}^2/r_0}$, где g – ускорение свободного падения на поверхности планеты, а $R_\text{п}$ – ее радиус.

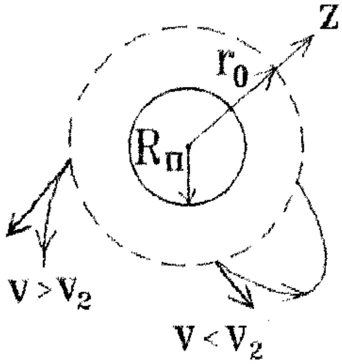

Рис.3.7

Число молекул, пересекающих единицу поверхности сферы за одну секунду в направлении планеты в космос со скоростью $v > v_2$ вычисляется по формуле (3.15), полученной в задаче 9.1:

$$j = n(r_0)\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{v_2}^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv =$$

$$= \frac{1}{4} n(r_0) \langle v \rangle \left(1 + \frac{mgR_\text{п}^2}{kTr_0}\right) \exp\left(-\frac{mgR_\text{п}^2}{kTr_0}\right) \,,$$

где распределение плотности или концентрации молекул для равновесной атмосферы было получено в формуле (3.20) (задача 11.2):

$$n(r_0) = n_0 \exp\left(-\frac{mgR_\text{П}(r_0 - R_\text{П})}{kTr_0}\right).$$

Подставляя это распределение в выражение для j и проводя необходимые преобразования, находим плотность потока покидающих атмосферу молекул

$$j = \frac{1}{4} n_0 \langle v \rangle \left(1 + \frac{mgR_\text{П}^2}{kTr_0}\right) \exp\left(-\frac{mgR_\text{П}}{kT}\right), \tag{3.25}$$

где n_0 – концентрация молекул у поверхности планеты.

Для оценки времени потери атмосферы τ учтём, что реальная толщина атмосферы $H = r_0 - R_\text{П} \ll R_\text{П}$. Поэтому концентрация молекул в ней (3.20) меняется с высотой h по приближённому закону $n \approx n_0 \exp(-mgh/kT)$, и полное число молекул атмосферы

$$N = \int_0^H n \cdot 4\pi (R_\text{П} + h)^2 dh \approx 4\pi R_\text{П}^2 n_0 \int_0^H \exp(-mgh/kT) dh =$$

$$= 4\pi R_\text{П}^2 n_0 \frac{kT}{mg} \left[1 - \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)\right] \approx 4\pi R_\text{П}^2 n_0 \frac{kT}{mg},$$

откуда

$$n_0 \approx mgN \big/ (4\pi R_\text{П}^2 kT). \tag{3.26}$$

Потеря молекул за время dt через сферическую поверхность радиуса $r_0 \approx R_\text{П}$ составит, после подстановки величин (3.25), (3.26) и $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m)}$,

$$dN = -j\Big|_{r_0 \approx R_\text{П}} 4\pi R_\text{П}^2 dt =$$

$$= -g\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} N \left(1 + \frac{mgR_\text{П}}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mgR_\text{П}}{kT}\right) dt.$$

Время, за которое атмосфера потеряет 90% молекул, можно определить, разделяя переменные в последнем выражении и проводя интегрирование:

$$t = -\frac{\sqrt{2\pi kT/m}}{g(1 + mgR_\text{П}/kT)} \exp\left(\frac{mgR_\text{П}}{kT}\right) \int_N^{0{,}1N} \frac{dN}{N}.$$

Так как $k/m = R/\mu$, то для Земли ($g = 9{,}81$ м/с^2, $T = 216{,}5$ К (температура стратосферы), $R_\text{З} = 6{,}37 \cdot 10^6$ м) время потери 90% водорода ($\mu = 2$ г/моль) составит

$$t \approx -\frac{\sqrt{2\pi RT/\mu}}{g(1 + \mu g R_\text{З}/RT)} \exp\left(\frac{\mu g R_\text{З}}{RT}\right) \ln 10 = 7{,}92 \cdot e^{69{,}4} \approx 1{,}1 \cdot 10^{31} \text{ с}$$

или примерно $3{,}6 \cdot 10^{23}$ лет. Такой несуразный результат обязан тому, что на самом деле температура Земли (и ее атмосферы) в ранние эпохи была несколько выше. Например, при $T = 440$ K (167 °C) получилось бы всего

$$\tau \approx 4,9 \cdot 10^8 \text{ лет},$$

что меньше возраста твердой Земли $\sim 4,5 \cdot 19^9$ лет. И, действительно, в атмосфере Земли сейчас практически нет водорода.

12 Средний свободный пробег и частота столкновений молекул газа

Средней длиной свободного пробега λ называется среднее расстояние, проходимое молекулой без столкновений. Вычисления с учетом распределения Максвелла приводят к следующему выражению для длины среднего свободного пробега одинаковых молекул

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \tag{3.27}$$

где n – концентрация молекул, а d – так называемый эффективный (газокинетический) диаметр молекулы.

Число столкновений одной молекулы с другими за одну секунду (частота столкновений) определяется формулой

$$\nu = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle\ . \tag{3.28}$$

Задача 12.1

Найти закон ослабления молекулярного пучка, проходящего через газ.

Решение

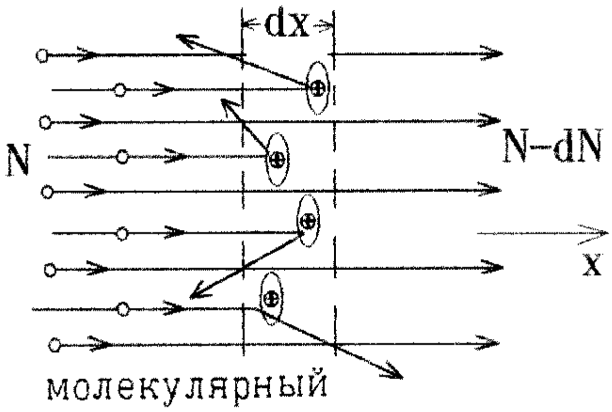

Рис.3.8

Пусть пучок из N молекул с поперечным сечением S распространяется вдоль оси x и попадает в область, заполненную газом. Если бы молекулы газа покоились, то часть молекул пучка, прошедшая через газ, попадала бы в пределы эффективных сечений молекул газа с площадью $\sigma = \pi d^2$ и отклонялась бы в разные стороны, как показано на рис.3.8. Число таких молекул, рассеянных в слое толщины dx с площадью S пропорционально средней площади эффективных сечений молекул в слое $\sigma \cdot nSdx$, где n – концентрация молекул газа, т.е.

$$-dN/N = \sigma nSdx/S\,.$$

Знак "—" учитывает убыль молекул в пучке. В действительности молекулы газа движутся. Средняя относительная скорость движущихся молекул, а вместе с тем и число соударений, возрастает в $\sqrt{2}$ раз (формула (3.13) в задаче 8.4). Поэтому $-dN/N = \sqrt{2}\sigma n dx$, откуда с учётом начальных условий ($N = N_0$ при $x = 0$) получаем искомый закон ослабления интенсивности пучка

$$N = N_0 \exp\left(-\sqrt{2}\sigma n x\right) = N_0 \exp(-x/\lambda). \qquad (3.29)$$

Формула (3.29) широко используется для экспериментального измерения эффективного сечения σ молекул газа.

Задача 12.2

Найти вероятность w того, что атом гелия пройдет отрезок $\ell = 0,5$ мм без столкновений. Гелий находится при температуре $T = 273$ К и давлении $p = 100$ Па. Газокинетический диаметр атома Не $d = 2,18 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение

Предположим, что в том же направлении, что и атом гелия, движется огромное число $N_0 \gg 1$ таких же атомов (молекулярный пучок Не). По закону больших чисел вероятность того, что один атом пройдёт расстояние x без столкновений, пропорциональна числу частиц пучка, не испытавших столкновений, т.е. $w = N/N_0$. Тогда в соответствии с (3.29) и с учётом уравнения состояния идеального газа (1.3) получаем искомую вероятность

$$w(\ell) = \exp(-\sqrt{2}\sigma n\ell) = \exp\left(\frac{-\sqrt{2}\pi d^2 p\ell}{kT}\right), \qquad (3.30)$$

или, после подстановки численных значений, $w(\ell) = 0,0607 = 6,07\%$.

Задача 12.3

Как изменяются частота столкновений и средняя длина свободного пробега молекул идеального газа при его адиабатическом сжатии ?

Решение

Так как средняя длина свободного пробега молекул идеального газа

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{\text{const}}{n},$$

а концентрация молекул n при любом изменении объема изменяется, как $1/V$, то, следовательно, $\lambda \sim V$, т.е. λ при сжатии убывает пропорционально объему газа.

Что касается частоты столкновений ν, то $\nu = \langle v\rangle/\lambda \sim \sqrt{T}/V$. При адиабатическом сжатии T растет пропорционально $V^{1-\gamma}$, поэтому

$$\nu \sim V^{(1-\gamma)/2}/V \sim 1/V^{(1+\gamma)/2},$$

т.е. частота столкновений при адиабатическом сжатии газа растет, как $1/V^{(1+\gamma)/2}$.

Задача 12.4

Вычислить среднее расстояние вдоль заданного направления, проходимое молекулой после последнего столкновения.

Решение

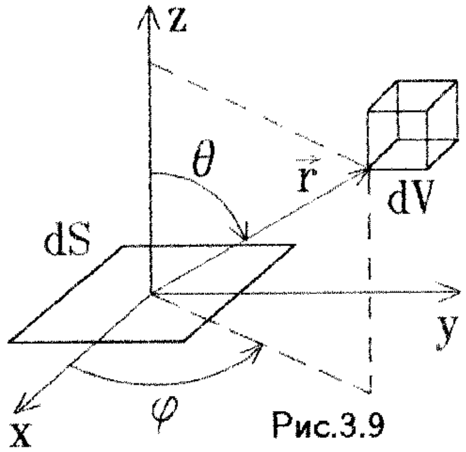

Рис.3.9

Рассмотрим площадку dS, находящуюся в начале координат, которую пересекают молекулы, приходящие из разных точек с координатами r, θ, φ. Полное количество молекул, пересекающих площадку dS в одном направлении за время dt известно (формула (3.14)): $dN = (n\langle v\rangle/4)dSdt$. Но в данной задаче нас интересует число молекул, пересекающих площадку dS за время dt и приходящих без столкновений из объема dV, в котором они испытывают столкновение.

Число молекул в этом объеме ndV, число столкновений в нем за dt равно $(\nu dt/2)ndV$. После столкновений все столкнувшиеся молекулы, а их число вдвое больше числа столкновений, разлетаются изотропно ("хаотически") по всем направлениям, поэтому некоторые из них долетают до площадки dS. Число таковых будет

$$\nu dt\, ndV \frac{dS_{\text{норм}}}{4\pi r^2} = \nu dt\, ndV\, \frac{dS\cos\theta}{4\pi r^2},$$

но часть из них на пути до площадки испытает столкновения. Тех же молекул, которые столкновений не испытают, будет согласно формуле (3.29) меньше, а именно:

$$dN = \frac{dS\cos\theta}{4\pi r^2}\nu dt\, ndV \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right).$$

Если теперь учесть, что $dV = r^2\sin\theta\, drd\theta\, d\varphi$ (в сферических координатах), и найти плотность потока, то получим

$$dj(r,\theta,\varphi) = \frac{dN}{dSdt} = \frac{\nu n}{4\pi}\cos\theta\sin\theta\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)drd\theta\, d\varphi. \tag{3.31}$$

Это – число молекул, пересекающих единичную площадку за единицу времени и приходящих из элемента объема dV без столкновений.

Остается найти искомую величину, т.е.

$$\langle z\rangle = \frac{\int z dj}{\int dj} = \frac{\int r\cos\theta\, dj}{\int dj} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{2\lambda}{3}, \qquad (3.32)$$

где в процессе вычисления были введены обозначения

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\, d\theta \cdot \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) dr = \frac{\lambda}{4},$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \cdot \int\limits_0^{\infty} r\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) dr = \frac{\lambda^2}{6}.$$

Задача 12.5

Доказать, что среднее расстояние, проходимое молекулой, начиная с произвольного момента времени, до момента первого столкновения, равно средней длине свободного пробега.

Решение

Вероятность того, что молекула на пути dx испытает столкновение с другой молекулой $dw_1 = dx/\lambda$, где λ – средняя длина свободного пробега. Вероятность прохождения пути x без столкновения определяется формулой (3.30). Так как столкновения молекул – события независимые и случайные, то вероятность того, что, начиная с момента наблюдения, молекула пройдет без столкновений расстояние x и столкнется на следующем отрезке dx, равна произведению вероятностей:

$$dw = w(x)\cdot dw_1 = \exp(-x/\lambda)\cdot(dx/\lambda).$$

Поэтому средним расстоянием, проходимым "наблюдаемой" молекулой до первого соударения, будет величина:

$$\langle x\rangle = \int x dw \Big/ \int dw = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\infty} e^{-x/\lambda} x dx = \lambda.$$

13 Процессы переноса

Любая неравновесная система релаксирует к состоянию равновесия. Поэтому при наличии градиентов физических величин (энергии, импульса, плотности, электрического заряда и т.д.) возникают соответствующие потоки, пропорциональные градиентам и направленные против них – это и есть процессы переноса.

1) Диффузия описывается законом Фика:

$$\vec{j}_N = -D\,\mathrm{grad}\, n, \qquad (3.33)$$

где $\vec{j}_N$ – плотность потока частиц, n – концентрация, D – коэффициент диффузии.

2) Внутреннее трение или вязкость определяется законом Стокса:

$$\vec{j}_p = -\eta \operatorname{grad} v\,, \tag{3.34}$$

где $\vec{j}_p$ – плотность потока импульса, v – величина (модуль) скорости течения, а η – динамическая вязкость. Поэтому сила вязкого трения, отнесенная к единице площади соприкасающихся поверхностей газа или жидкости, равна по величине

$$F/S = \eta |\operatorname{grad} v| \tag{3.35}$$

и перпендикулярна к направлению потока импульса.

3) Теплопроводность подчиняется закону Фурье:

$$\vec{j}_Q = -æ \operatorname{grad} T\,, \tag{3.36}$$

где $\vec{j}_Q$ – плотность потока тепла, T – абсолютная температура, а $æ$ – коэффициент теплопроводности вещества.

Для идеального газа коэффициенты диффузии, вязкости и теплопроводности можно вычислить по простым формулам:

$$D = \lambda \langle v \rangle /3\,, \quad \eta = D\rho\,, \quad æ = c_V \eta\,, \tag{3.37}$$

где λ – средняя длина свободного пробега молекул, ρ – плотность газа, а c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Задача 13.1

Найти температуру нижней поверхности дна алюминиевого чайника, из которого ежеминутно выкипает $m = 20$ г воды. Потерями теплоты через боковые стенки пренебречь. Толщина дна $h = 2$ мм, площадь его $S = 200$ см^2, теплопроводность алюминия $æ = 210$ Вт/(м · К), удельная теплота парообразования воды при 100 °С $q = 2{,}25$ МДж/кг.

Решение

Тепло, необходимое для выкипания воды, поступает через дно чайника благодаря теплопроводности; поэтому согласно уравнению (3.36)

$$Q = qm = æ|dT/dx|S\tau\,.$$

Так как процесс переноса тепла в рассматриваемом случае стационарен, то $|dT/dx| = \Delta T/h$ и, следовательно,

$$\Delta T = qmh/(æS\tau) = 0{,}36 \text{ K}.$$

Итак, температура нижней поверхности дна равна 100,36 °С.

Задача 13.2 (Задача Стéфана)

Какой толщины слой льда образуется на поверхности озера за сутки, считая от начала резкого падения температуры воздуха от 0 °С до

$-10\,°C$? Теплопроводность льда $\ae = 2,2$ Вт/(м · К), удельная теплота плавления льда $q = 335$ кДж/кг, плотность льда $\rho = 900$ кг/м^3.

Решение

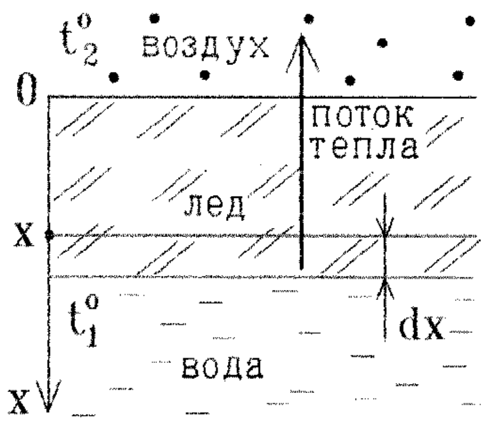

Рис.3.10

В начальный момент времени ($\tau = 0$) температура воды была $0\,°C$, а толщина слоя льда $x_0 = 0$. К моменту $\tau > 0$ образовался слой льда толщины x, а за время $d\tau$ нарастает слой льда толщины dx. Все тепло, выделившееся за время $d\tau$ вследствие замерзания воды с массой dm, уходит в воздух через слой льда толщины x, т.е.

$$qdm = \ae\left|\frac{dT}{dx}\right|Sd\tau\,. \tag{3.38}$$

Но масса замерзшей воды равна массе образовавшегося льда, поэтому $dm = \rho S dx$; кроме того, для стационарного потока тепла $|dT/dx| = \Delta t/x = (t_1 - t_2)/x$. Следовательно, процесс замерзания воды описывается дифференциальным уравнением

$$q\rho dx = \ae\frac{t_1 - t_2}{x}d\tau\,,$$

решение которого с учетом начальных условий имеет вид

$$q\rho x^2/2 = \ae(t_1 - t_2)\tau\,,$$

откуда

$$x(\tau) = \sqrt{\frac{2\ae(t_1 - t_2)\tau}{q\rho}} = 11,2 \text{ см}\,. \tag{3.39}$$

Эта задача относится к особому типу задач "с движущимися границами" или задач Сте́фана. Как следует из выражения (3.39), перемещение границы лед – вода происходит по параболическому закону

$$x_{\text{гр}} \sim \sqrt{\tau}\,. \tag{3.40}$$

Такому же закону подчиняется (точно или приближенно) движение границы двух фаз и в других случаях, важных для технических приложений, например, при затвердевании слитка, при диффузионном отжиге, при нанесении жаростойких покрытий и т.п.

Задача 13.3

Стена нагревательной печи сделана из огнеупорного кирпича, имеющего толщину 75 см и теплопроводность 1 Вт/(м · К). Какова будет толщина стенки печи, если ее сделать двухслойной: слой огнеупорного кирпича толщины 25 см и слой неогнеупорного, но слабо проводящего тепло материала, с теплопроводностью 0,1 Вт/(м · К) ?

Решение

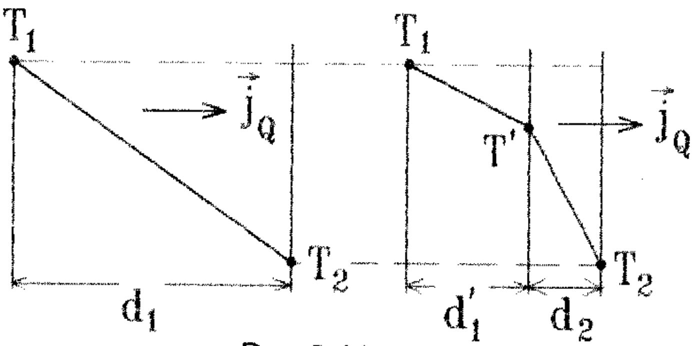

Рис.3.11

Очевидно, что в обоих случаях должны быть одинаковыми как потоки тепла, так и разности температур между внутренними и внешними поверхностями стенок. Кроме того, в силу стационарности процесса потоки тепла в каждом слое также одинаковы, а градиенты температур постоянны (рис.3.11). Эти соображения позволяют записать два уравнения:

$$-\frac{æ_1(T_2-T_1)}{d_1} = -\frac{æ_1(T'-T_1)}{d'_1}\,; \quad -\frac{æ_1(T_2-T_1)}{d_1} = -\frac{æ_2(T_2-T')}{d_2}\,.$$

Из первого находим

$$T'-T_1 = \frac{d'_1}{d_1}(T_2-T_1) \quad \text{и} \quad T' = T_1 + \frac{d'_1}{d_1}(T_2-T_1)\,,$$

а затем из второго –

$$d_2 = d_1\frac{æ_2}{æ_1}\cdot\frac{T_2-T'}{T_2-T_1} = d_1\frac{æ_2}{æ_1}\cdot\left(1-\frac{d'_1}{d_1}\right) = 5\ \text{см}\,.$$

Поэтому толщина двухслойной стенки будет

$$d = d'_1 + d_2 = 30\ \text{см}\,.$$

Задача 13.4 (Формула Пуазейля)

Два открытых сосуда с площадью поперечного сечения $S = 200$ см^2 каждый соединяют на уровне дна капилляром радиуса $R = 0,5$ мм и длины $l = 5$ см. В начальный момент уровень воды в левом сосуде в два раза выше, чем в правом (рис.3.12). За какое время τ разность уровней воды в сосудах уменьшится в два раза ? Динамическая вязкость воды $\eta = 10^{-2}$ кг/(м · с).

Решение

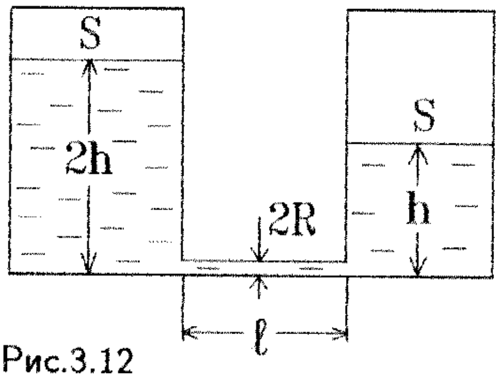

Рис.3.12

Скорость v воды в капилляре будет меняться со временем (вследствие изменения разности уровней) так незначительно, что в любой момент времени течение можно считать ламинарным и стационарным, т.е. $v \approx \text{const}$.

Найдём сначала распределение скорости течения по радиусу капилляра. Для этого выделим в капилляре цилиндрический объём воды

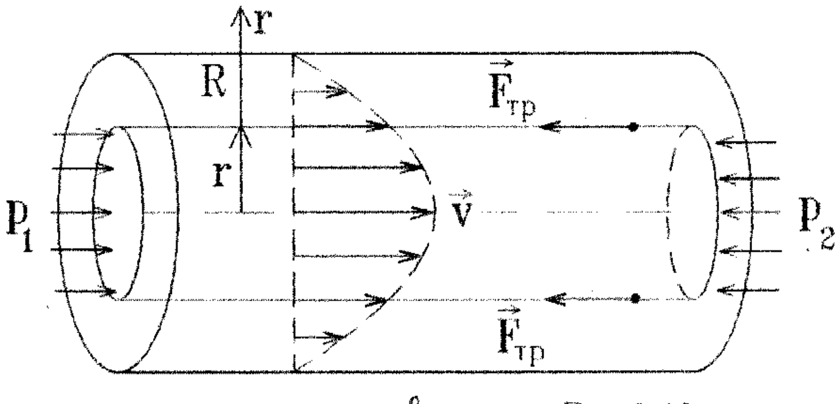

Рис.3.13

радиуса r (рис. 3.13). Слои жидкости, находящиеся на разном расстоянии r от оси капилляра будут иметь разные скорости v и поэтому будут смещаться друг относительно друга. Но если записать уравнение движения воды сразу для всего цилиндра, то при стационарном установившемся течении скорость центра масс цилиндра постоянна, а все силы трения, действующие на слои жидкости внутри цилиндра, в сумме дают ноль. Поэтому при таком течении сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая на внешнюю боковую поверхность цилиндра, должна уравновешиваться разностью сил гидростатического давления, действующих на основания цилиндра (рис.3.13). Согласно формуле (3.35)

$$F_{тр} = -2\pi r\ell \cdot \eta \frac{dv}{dr} = (p_1 - p_2)\pi r^2 .$$

В этом уравнении $\dfrac{dv}{dr} < 0$, так как скорость течения вязкой жидкости убывает по мере приближения к стенкам капилляра и становится равной нулю вблизи стенок (рис.3.13). Интегрируя полученное уравнение с учётом такого граничного условия, т.е. $v|_{r=R} = 0$, находим:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell}(R^2 - r^2) \tag{3.41}$$

– известный параболический закон распределения скорости течения по радиусу при ламинарном вязком течении жидкости по трубе. Интегрируя выражение (3.41) по сечению трубы, найдем поток жидкости, т.е. объём воды, ежесекундно протекающий через поперечное сечение трубы при наличии разности давлений

$$J_V = \int_0^R v \cdot 2\pi r dr = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta\ell} \int_0^R 2\pi r(R^2 - r^2)dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta\ell} . \tag{3.42}$$

Это – формула Пуазейля (закон Хагена – Пуазейля).

В поставленной задаче высота h_1 уровня воды в левом сосуде будет уменьшаться, а высота h_2 уровня воды в правом сосуде будет расти. Но $h_1 + h_2 = 2h + h = \text{const}$, и поэтому

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2) = \rho g(2h_1 - 3h) .$$

За время dt уровень воды в левом сосуде понизится на $-dh_1$, а через капилляр протечёт объём воды $J_V dt = -dh_1 \cdot S$. Используя формулу Пуазейля (3.42), разделяем переменные и интегрируем записанное уравнение. Так как по условию за время τ разность уровней должна уменьшиться в два раза ($h_1 - h_2 = h/2$), то $h_1(\tau) = 7h/4$ и

$$\int_0^\tau dt = -\frac{8\eta\ell S}{\pi\rho g R^4}\int_{2h}^{7h/4}\frac{dh_1}{2h_1 - 3h} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{4\eta\ell S}{\pi\rho g R^4}\ln 2 = 4 \text{ часа}.$$

Задача 13.5 (Вязкость ультраразреженного газа)

Оценить силу сопротивления, испытываемую телом, движущимся в разреженном газе. Учесть, что в этом случае линейные размеры тела много меньше средней длины свободного пробега.

Решение

Сначала найдём приближенную формулу для "коэффициента вязкости", для чего рассмотрим две параллельные твердые поверхности, расстояние между которыми Δh, движущиеся со скоростями u и $u + \Delta u$ в разреженном газе (рис.3.14). Величина силы трения между поверхностями, как и в случае неразреженного газа, по-прежнему определяется выражением:

$$F = \eta\frac{\Delta u}{\Delta h}S\,,$$

где S – площадь поверхностей, а η – "коэффициент вязкости" газа. Оценить этот коэффициент по порядку величины можно по аналогии с известным выражением для коэффициента вязкости обычного газа (например, [14]):

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\lambda\langle v\rangle\,.$$

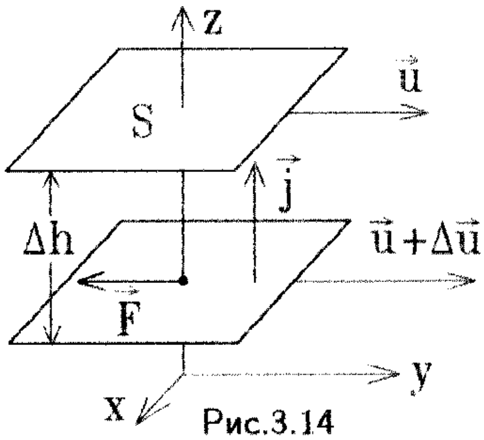

Рис.3.14

Заменяя в этой формуле длину свободного пробега λ на Δh (так как молекулы теперь сталкиваются не друг с другом, а с поверхностями) и отбрасывая несущественный коэффициент $1/3$, получим:

$$\eta_{\text{разр}} \sim \rho\Delta h\langle v\rangle\,.$$

С учётом уравнения состояния идеального газа $\rho = p\mu/(RT)$ и формулы для средней скорости теплового движения молекул $\langle v\rangle = \sqrt{8RT/(\pi\mu)}$ находим, что по порядку величины

$$\eta_{\text{разр}} \sim p\Delta h/\langle v\rangle\,.$$

Отсюда следует, что "коэффициент вязкости" разреженного газа пропорционален давлению, в отличие от коэффициента вязкости обычного газа, который от давления не зависит. К тому же $\eta_{\text{разр}}$ определяется не только свойствами газа, но и расстоянием между поверхностями !

Применим теперь полученное для η выражение для оценки силы сопротивления, испытываемой движущимся в разреженном газе телом, учитывая, что $\dfrac{\Delta u}{\Delta h} \sim \dfrac{u}{l}$, где u – скорость тела, а l – его линейные размеры:

$$F_{\text{сопр}} \sim \eta_{\text{разр}} \frac{u}{l} S \sim \frac{puS}{\langle v \rangle}.$$

Основное различие сил сопротивления движению тела в разреженном и неразреженном газах, как видно из полученной формулы, заключается в том, что первая зависит от площади тела, тогда как вторая – от его линейных размеров (например, при падении в воздухе капли дождя сила сопротивления пропорциональна радиусу капли).

Задача 13.6 (Броуновское движение)

Среднее смещение броуновской частицы за время τ равно $\langle \ell \rangle$. Найти среднее смещение этой частицы за время 2τ.

Решение

Рассмотрим два последовательных смещения ℓ_1 и ℓ_2 (рис.3.15). Результирующее смещение $\ell = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1\ell_2 \cos\alpha}$.

Среднее значение его квадрата будет

$$\langle \ell^2 \rangle = \langle \ell_1^2 \rangle + \langle \ell_2^2 \rangle,$$

так как ℓ_i не зависит от α_i и, вследствие равновероятности смещений по направлениям, $\langle \cos\alpha \rangle = 0$. А поскольку смещения равновероятны и по длине, то

$$\langle \ell_1^2 \rangle = \langle \ell_2^2 \rangle \quad \text{и} \quad \langle \ell^2 \rangle = 2\langle \ell_1^2 \rangle$$

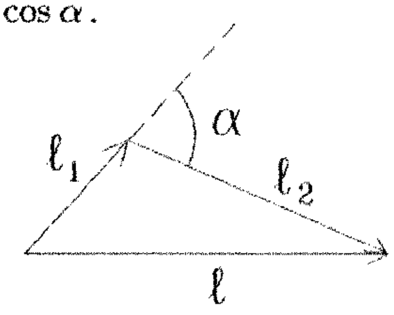

Рис.3.15

– средний квадрат результирующего смещения пропорционален числу шагов, а, значит, и времени.

Вообще говоря, $\langle \ell^2 \rangle \neq \langle \ell \rangle^2$, но для определенной функции распределения между этими двумя величинами существует постоянное соотношение. Например, $\langle v^2 \rangle = 3kT/m$, а $\langle v \rangle^2 = 8kT/\pi m$, но всегда $\langle v^2 \rangle = (3\pi/8)\langle v \rangle^2$, если функция распределения – максвелловская. Поэтому $\langle s \rangle^2$ тоже пропорционален времени, т.е.

$$\langle \ell \rangle^2 \sim \tau \quad \text{или} \quad \langle \ell \rangle \sim \sqrt{\tau}. \tag{3.43}$$

Уравнение (3.43) является основным законом броуновского движения. Из него следует, что

$$\langle \ell(2\tau) \rangle = \sqrt{2}\,\langle \ell(\tau) \rangle .$$

Глава 4.

Задачи по молекулярной физике для самостоятельного решения

Распределение Максвелла

8-1. Что произойдет с максимумом функции распределения Максвелла по величинам скоростей молекул а) при увеличении температуры газа в четыре раза ? б) при увеличении массы молекул газа в два раза ?

Ответ: а) уменьшится в 2 раза; б) увеличится в 1,41 раза.

8-2. 15 г аргона находятся в закрытом сосуде при температуре $T = 300$ К. Какое количество тепла нужно сообщить азоту, чтобы средняя квадратичная скорость его молекул возросла в 2 раза ?

Ответ: $4,21$ кДж.

8-3. Во сколько раз нужно адиабатически расширить газ, состоящий из одноатомных молекул, чтобы их средняя квадратичная скорость уменьшилась в 1,5 раза ?

Ответ: в 3,37 раз.

8-4. Во сколько раз число молекул dN_1, скорости которых лежат в интервале $(v_{\text{в}}, v_{\text{в}}+dv)$, больше числа молекул dN_2, скорости которых лежат в интервале $(v_{\text{кв}}, v_{\text{кв}}+dv)$? Здесь $v_{\text{в}}$ и $v_{\text{кв}}$ – наиболее вероятная и средняя квадратичная скорости соответственно.

Ответ: $dN_1 \big/ dN_2 = 1,10$.

8-5. Найти температуру газообразного азота N_2, при которой скоростям молекул 300 м/с и 600 м/с соответствуют одинаковые значения функции распределения Максвелла.

Ответ: $$T = \frac{\mu(v_2^2 - v_1^2)}{4R\ln(v_2/v_1)} = 328\ \text{К}.$$

8-6. Найти для газообразного азота N_2 скорость v молекул, для которой величина функции распределения Максвелла при температуре T будет такой же, как и при температуре в η раз большей.

Ответ: $$v = \sqrt{\frac{3kT}{m} \cdot \frac{\eta \ln \eta}{\eta - 1}}.$$

8-7. Один моль азота N_2 находится в равновесном состоянии при температуре $T = 300$ К. Найти: а) сумму проекций скоростей всех молекул на ось x, т.е. $\sum v_x$; б) сумму скоростей всех молекул $\sum \vec{v}$; в) сумму квадратов скоростей всех молекул $\sum \vec{v}^2$; г) сумму модулей скоростей всех молекул $\sum |\vec{v}|$.

Ответ: а) 0 ; б) 0 ; в) $1,61 \cdot 10^{29}$ (м/с)^2 ; г) $2,87 \cdot 10^{26}$ м/с.

8-8. Найти долю молекул газа, имеющих скорости от $0,5v_{\text{в}}$ до $1,5v_{\text{в}}$. Указание: для вычислений воспользоваться таблицей 11 из [3].

Ответ: 70,5%.

8-9. Какая часть молекул азота N_2 при температуре 148 °С имеет скорости, лежащие в интервале от 300 м/с до 750 м/с ? Указание: для вычислений использовать таблицу 11 из [3].

Ответ: 65,5%.

8-10. Найти сумму модулей импульсов молекул, содержащихся в одном моле азота, и средний квадрат импульса одной молекулы. Температура газа равна 20 °С.

Ответ: $\sum |\vec{p}| = \sqrt{8\mu RT/\pi} = 13,18$ кг · м · с$^{-1}$;
$\langle p^2 \rangle = 5,46 \cdot 10^{-46}$ кг^2 · м^2/с^2.

8-11. В закрытом сосуде находится один моль идеального одноатомного газа при температуре 293 К. Какое количество тепла нужно подвести к газу, чтобы средняя скорость его молекул увеличилась на 1% ?

Ответ: 73,4 Дж.

8-12. Смесь молекулярного водорода и гелия находится при температуре 300 К. При какой скорости молекул величины функции распределения Максвелла будут одинаковыми для обоих газов ?

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu_{\text{H}} - \mu_{\text{He}}} \, ln\left(\dfrac{\mu_{\text{He}}}{\mu_{\text{H}}}\right)} = 1610$ м/с.

8-13. Скорости частиц в потоке имеют одно и то же направление и находятся в интервале от v_0 до $2v_0$. График функции распределения имеет вид прямоугольника. а) Какой вид имеет функция распределения частиц по скоростям ? б) Как изменится эта функция распределения, если на все частицы в течение времени τ действовала в направлении их движения постоянная сила F ? Масса частицы равна m.

Ответ: а) $f(v) = 1/v_0$ при $v_0 \leqslant v \leqslant 2v_0$ и равна 0 при всех остальных значениях v; б) $f'(v) = f(v \pm F\tau/m)$.

8-14. При какой температуре газа число его молекул со скоростями, лежащими в интервале от v до $v + dv$, будет максимальным ? Масса одной молекулы газа равна m.

Ответ: $T = mv^2/(3k)$.

8-15. Используя распределение Максвелла, найти $\langle 1/v \rangle$ – среднее значение величины обратной скорости молекул идеального газа, находящегося при температуре T. Масса одной молекулы равна m.

Ответ: $\sqrt{2m/(\pi kT)}$.

8-16. Потенциал ионизации атомов калия $\varphi_i = 4,34$ В. Какой процент атомов в дуговом разряде высокого давления в парах калия может при столкновениях ионизировать другие атомы ? Температура газа в разряде $16,1 \cdot 10^3$ K, а условием ионизации будет: $mv^2/2 \geqslant 2e_0\varphi_i$, где e_0 – заряд электрона. Указание: воспользоваться таблицей 11 из [3].

Ответ: $\sim 0,57\%$.

8-17. При какой температуре электронного газа в газовом разряде в парах ртути 10% всех электронов может ионизировать атомы ртути ? Условие ионизации имеет вид: $mv^2/2 \geqslant e_0\varphi_i$, где e_0 – заряд электрона, а φ_i – потенциал ионизации ртути, равный 10,44 В. Указание: воспользоваться рис.84 из [3].

Ответ: $3,74 \cdot 10^4$ K.

8-18. Вычислить отношение числа частиц идеального газа, имеющих энергии, меньшие и большие kT. Указание: для вычислений воспользоваться таблицей 11 из [3].

Ответ: 0,748.

8-19. В газе, состоящем из N молекул, известна функция распределения $f(v)$ молекул по скоростям. Чему равна вероятность того, что только одна (все равно какая) молекула имеет скорость в интервале от v до $v + \Delta v$, причем $\Delta v \ll \sqrt{kT/m}$?

Ответ: $N\Delta w(1 - \Delta w)^{N-1}$, где $\Delta w = f(v)\Delta v$.

8-20. Идеальный газ состоит из молекул массы m и находится при температуре T. Найти наиболее вероятное значение кинетической энергии его молекул. Будет ли оно равно $mv_{\text{В}}^2/2$, где $v_{\text{В}}$ – наиболее вероятная скорость, и почему ?

Ответ: $kT/2$; нет.

8-21. При температуре $T = 384,9$ K долю молекул идеального газа (аргона), имеющих скорости от $v = 280$ м/с до $v + \Delta v = 320$ м/с, можно вычислить по приближённой формуле $f_{\text{М}}(v)\Delta v$, где $f_{\text{М}}$ – функция распределения Максвелла. Какой величины будет ошибка при таком приближённом вычислении ? Указание: использовать таблицу 11 из [3].

Ответ: $5,91\%$.

8-22. Вычислить с помощью распределения Максвелла среднюю проекцию скорости $\langle v_x \rangle$ и среднее значение модуля этой проекции $\langle |v_x| \rangle$, если масса одной молекулы равна m, а температура газа T.

Ответ: $\langle v_x \rangle = 0$; $\langle |v_x| \rangle = \sqrt{2kT/(\pi m)}$.

8-23. Вычислить с помощью распределения Максвелла среднее значение квадрата проекции скорости молекул газа $\langle v_x^2 \rangle$ при температуре T. Масса одной молекулы равна m.

Ответ: $\langle v_x^2 \rangle = kT/m$.

8-24. Распределение молекул по скоростям описывается функцией

$$F(v) = Av^3 \exp(-mv^2/2kT),$$

где T – температура газа. Найти наиболее вероятное значение кинетической энергии молекул газа.

Ответ: $E_{\text{вер}} = kT$.

8-25. Во сколько раз обратная величина средней скорости молекул идеального газа $\langle v \rangle^{-1}$ меньше средней величины обратной скорости молекул $\langle v^{-1} \rangle$?

Ответ: $\langle v^{-1} \rangle \Big/ \langle v \rangle^{-1} = 4/\pi = 1,27$.

8-26. Вычислить, пользуясь распределением Максвелла, долю молекул газа, скорости которых лежат в интервале от средней до средней квадратичной. Как эта величина зависит от температуры газа ? Указание: использовать рис.84 из [3].

Ответ: $\Delta N/N \approx 7,7\%$, от температуры не зависит.

8-27. В баллоне содержится $1,2$ моля идеального газа. Найти число молекул, скорости которых меньше 0,1% наиболее вероятной скорости.

Ответ: $5,44 \cdot 10^{14}$.

8-28. Какая часть молекул одноатомного газа имеет кинетическую энергию, отличающуюся от среднего значения на $0,1\%$?

Ответ: $0,0925\%$.

8-29. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более, чем на 1% от значений а) наиболее вероятной скорости, б) средней квадратичной скорости.

Ответ: а) $1,66\%$; б) $1,85\%$.

8-30. Пользуясь распределением Максвелла, вычислить среднюю кубическую скорость молекул, т.е. $\sqrt[3]{\langle v^3 \rangle}$, и сравнить ее с наиболее вероятной.

Ответ: $\sqrt[3]{\langle v^3\rangle} = \left(\sqrt[3]{4/\sqrt{\pi}}\right) v_{\text{в}} = 1,31\, v_{\text{в}}$.

8-31. На анод лампы перпендикулярно падает узкий пучок электронов. Скорости частиц в пучке распределены по известному закону

$$dN(v) = NAv^3 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) dv$$

и направлены параллельно оси пучка. Найти давление пучка на анод, если плотность тока в пучке $j = 0,1$ мА/см^2 , а температура пучка $T = 1500$ K .

Ответ: $p = \dfrac{8j}{3e_0}\sqrt{\dfrac{2kTm_e}{\pi}} = 1,824$ мкПа (m_e – масса электрона).

8-32. Найти среднюю величину модуля проекции скорости молекул газа на направление, перпендикулярное к некоторой выделенной оси x .

Ответ: $\langle v_\perp\rangle = \sqrt{\pi kT/(2m)}$.

8-33. Считая функцию распределения по энергиям максвелловской, найти выражения для доли молекул, энергии E которых а) много меньше тепловой, б) много больше тепловой и применить их к случаям а) $0 \leqslant E \leqslant E_1 = 0,01\, kT$ и б) $E \geqslant E_2 = 10\, kT$. Указание: приближённая формула для интеграла вероятности приведена в [4, стр.89, формула № 592].

Ответ: а) $\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{E_1}{kT}\right)^{3/2} - \dfrac{4}{5\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{E_1}{kT}\right)^{5/2} + \ldots \approx 0,075\%$;

б) $\dfrac{\Delta N}{N} \approx \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{E_2}{kT}}\exp\left(-\dfrac{E_2}{kT}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{kT}{E_2}}\exp\left(-\dfrac{E_2}{kT}\right) + \ldots = 0,017\%$.

8-34. В опыте Штерна на поверхности вращающегося цилиндра конденсируются молекулы серебра, испускаемые центральной нагретой нитью. Каким скоростям молекул соответствует максимум почернения ?

Ответ: $v_{\text{m}} = \sqrt{2,5}\, v_{\text{в}}$.

8-35. Число молекул, энергия которых больше некоторого значения E_1 , составляет 0,1% от общего числа молекул. Найти $\alpha = E_1/kT$. Указание: воспользоваться приближённой формулой [4, № 592 на стр. 89] для вычисления интеграла вероятности, сохранив два первых слагаемых ряда. Получающееся в процессе расчета трансцендентное уравнение решить графически.

Ответ: $\alpha = 8,14$.

Плотность потока молекул. Эффузия

9-1. Металл находится в равновесии со своим паром при давлении p и температуре T . Найти массу металла, испаряющегося за единицу времени с единицы поверхностим, как функцию p и T.

Ответ: $j = p\sqrt{m/(2\pi kT)}$, где m – масса одного атома.

9-2. Сколько молекул ударяется за 1 с о 1 м^2 стенки сосуда, в котором находится молекулярный азот при давлении 1013 гПа и температуре 20 °C ?

Ответ: $2,95 \cdot 10^{27}$ м$^{-2}$с$^{-1}$.

9-3. В сферическом сосуде с внутренним радиусом 5 см содержится водород при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 0,1$ МПа. Сколько молекул ударяется о стенки сосуда за 1 с ?

Ответ: $3,38 \cdot 10^{26}$ с$^{-1}$.

9-4. Во сколько раз изменится число ударов жестких двухатомных молекул о единицу поверхности стенки сосуда за единицу времени, если объем газа адиабатически увеличить в 10 раз ?

Ответ: уменьшится в 15,85 раз.

9-5. В сосуде, разделенном перегородкой на две части, в одной части находится смесь гелия и водорода с одинаковыми парциальными давлениями, а в другой – вакуум. На короткое время в перегородке открывается отверстие, размеры которого малы в сравнении с длиной свободного пробега. Найти отношение давления гелия к давлению водорода в той части сосуда, где до открывания отверстия был вакуум.

Ответ: $p_{\text{Г}}/p_{\text{В}} = \sqrt{\mu_{\text{В}}/\mu_{\text{Г}}} = 1/\sqrt{2}$.

9-6. Идеальный газ с молярной массой μ находится под давлением p_0 в тонкостенном сосуде объемом V, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре T. В момент $t_0 = 0$ в стенке сосуда открывается малое отверстие площадью S, и газ начинает вытекать из сосуда в вакуум. Найти давление газа в сосуде, как функцию времени.

Ответ: $p = p_0 \exp(-t/\tau)$, где $\tau = 4V/(S\langle v\rangle)$.

9-7. Вольфрамовая нить испаряется в высокий вакуум при температуре $T = 2000$ К со скоростью $q = 1,14 \cdot 10^{-13}$ г/(см$^2 \cdot$ с). Найти давление насыщенного пара вольфрама при этой температуре. Молярная масса вольфрама $\mu = 0,184$ кг/моль.

Ответ: $p = q\sqrt{2\pi RT/\mu} = 6,44 \cdot 10^{-12}$ мм рт. ст.

9-8. Отношение молярных масс различных газов можно измерять по скорости истечения их из сосуда с малым отверстием. Для этого достаточно найти время истечения определенной массы газа. Как оно зависит от молярной массы ?

Ответ: $l \sim \sqrt{\mu}$.

9-9. Откачанный тонкостенный сосуд с объемом V, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, погружен в атмосферу из идеального газа с постоянной концентрацией молекул n_0 и находящегося при той же температуре. Как будет меняться концентрация молекул газа в сосуде, если в его стенке появится малое отверстие площади S ?

Ответ: $n = n_0[1 - \exp(-t/\tau)]$, где $\tau = \dfrac{4V}{S\langle v\rangle}$.

9-10. Через какое время давление в тонкостенном откачанном сосуде, в стенке которого имеется отверстие с площадью 10^{-6} см^2, станет равным половине атмосферного ? Объем баллона 1 л, температура воздуха $20\,°C$.

Ответ: $t = \dfrac{4V}{S}\sqrt{\dfrac{\pi\mu}{8RT}}\ln 2 = 16,65$ часа.

9-11. Сосуд с газом разделен на две одинаковые половины 1 и 2 тонкой теплоизолирующей перегородкой с двумя отверстиями. Диаметр одного из них мал, а другого – велик по сравнению со средней длиной свободного пробега λ. В половине 2 температура поддерживается в η раз большей, чем в половине 1. Как и во сколько раз изменится концентрация молекул в половине 2, если закрыть только большое отверстие ?

Ответ: увеличится в $(1+\eta)\big/(1+\sqrt{\eta})$ раз.

9-12. Найти число молекул идеального газа, падающих в единицу времени на единицу поверхности стенки 1) под углами от θ до $\theta + d\theta$ к ее нормали, а также 2) в интервале скоростей от v до $v + dv$. Указание: перейти от функции распределения Максвелла по проекциям скоростей v_x, v_y, v_z к функции распределения по сферическим координатам v, θ, φ в пространстве скоростей.

Ответ: 1) $dj(\theta) = n\sqrt{2kT/(\pi m)}\,\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta$,

$$2)\ dj(v) = n\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv\,.$$

9-13. В сосуде с идеальным газом имеется малое отверстие с площадью S, на оси симметрии которого на расстоянии h от отверстия находится диск радиуса R (рис.4.1). Найти число частиц, ежесекундно вылетающих из отверстия и попадающих на диск, если известны концентрация n частиц в сосуде, температура газа T и масса m одной частицы. Использовать указание к задаче 9-12.

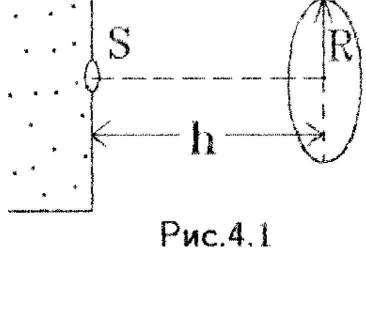

Рис.4.1

Ответ: $nS\sqrt{\dfrac{kT}{2\pi m}}\cdot\dfrac{R^2}{R^2+h^2}$.

9-14. Какая часть молекул газа, столкнувшихся со стенкой за 1 с, имеет кинетическую энергию, превосходящую E_0 ? Использовать указание к задаче 9-12.

Ответ: $\eta=\left(1+\dfrac{E_0}{kT}\right)\exp\left(-\dfrac{E_0}{kT}\right)$.

9-15. В тонкостенном сосуде, находящемся в вакууме, имеется малое отверстие, на которое извне направляется пучок одноатомных молекул, летящих с одинаковой скоростью v_0, перпендикулярной к площади отверстия. Концентрация молекул в пучке равна n_0. Найти среднюю скорость, концентрацию молекул и температуру газа в сосуде в установившемся состоянии.

Ответ: $\langle v\rangle=v_0\sqrt{2/\pi}$, $n=n_0\sqrt{8\pi}$, $T=mv_0^2/(4k)$.

9-16. В тонкостенном сосуде, содержащем одноатомный идеальный газ при температуре T, имеется маленькое отверстие, через которое атомы вылетают в вакуум. Найти среднее значение кинетической энергии вылетающего атома в предположении, что за время наблюдения можно пренебречь изменениями температуры и давления газа в сосуде. Указание: с помощью распределения Максвелла вычислить число атомов, вылетающих из отверстия за 1 с, и уносимую ими энергию.

Ответ: $\langle E\rangle=2kT$.

9-17. Тонкостенный сосуд объема V, наполненный идеальным одноатомным газом с концентрацией молекул n_0, находится при температуре Т. Средняя скорость молекул газа равна $\langle v\rangle$. В момент времени $t_0=0$ в стенке сосуда появилось маленькое отверстие площадью S, через которое молекулы газа вылетают в вакуум. Какое количество теплоты нужно подводить к сосуду ежесекундно, чтобы поддерживать в нем постоянную температуру T ? Указание: вычислить среднюю энергию вылетающих молекул.

Ответ: $dQ/dt=(kTS\langle v\rangle n_0/8)\exp(-\alpha t)$, где $\alpha=S\langle v\rangle\big/(4V)$.

Степени свободы молекул

10-1. Найти число степеней свободы молекулы газа, если при нормальных условиях плотность газа $1,3$ кг/м^3, а скорость распространения звука в нем 330 м/с.

Ответ: $i=5$.

10-2. Найти отношение скорости звука в газе к средней квадратичной скорости его молекул, если молекулы а) одноатомные; б) двухатомные.

Ответ: а) $0,745$; б) $0,683$.

10-3. Средняя энергия молекул одноатомного идеального газа равна $6 \cdot 10^{-21}$ Дж , а давление газа $0,2$ МПа . Найти концентрацию молекул.

Ответ: $5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

10-4. Газ, состоящий из жестких двухатомных молекул с моментом инерции $2,1 \cdot 10^{-39}$ г $\cdot$ см^2 относительно главной оси, находится при температуре 300 К . Найти среднюю квадратичную угловую скорость вращения молекулы вокруг данной оси.

Ответ: $4,44 \cdot 10^{12}$ с$^{-1}$.

10-5. Молярная масса некоторого газа равна $0,03$ кг/моль , а $\gamma =$ $= 1,4$. Найти удельные теплоемкости этого газа c_V и c_p .

Ответ: $c_V = 693$ Дж/(кг $\cdot$ К) , $c_p = 970$ Дж/(кг $\cdot$ К) .

10-6. Найти молярную массу и число степеней свободы молекул газа, если для него $c_V = 650$ Дж/(кг $\cdot$ К) и $c_p = 910$ Дж/(кг $\cdot$ К) .

Ответ: $\mu = 0,032$ кг/моль , $i = 5$.

10-7. Определить число поступательных + вращательных + колебательных степеней свободы молекул газа, для которого γ равно 1,667; 1,40; 1,333; 1,2857; 1,1667.

Ответ: 3 ; $3+2$; $3+3$; $3+2+1$; $3+3+3$.

10-8. Газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, находившийся при нормальных условиях, адиабатически сжали в 5 раз. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы в конечном состоянии газа.

Ответ: $7,17 \cdot 10^{-21}$ Дж .

10-9. Газ, состоящий из N - атомных молекул, имеет температуру, при которой у молекул возбуждены все степени свободы (поступательные, вращательные и колебательные). Найти среднюю энергию молекулы такого газа. Какую часть η этой энергии составляет поступательная энергия ? Молекулы газа считать а) объемными, б) линейными.

Ответ: а) $\langle E \rangle = (3N-3)kT$, $\eta = (2N-2)^{-1}$;
б) $\langle E \rangle = (3N-2,5)kT$, $\eta = (2N-5/3)^{-1}$.

10-10. При $T = 1000$ К у объёмных четырехатомных молекул некоторого идеального газа оказываются возбужденными все степени свободы, включая и колебательные. Найти внутреннюю энергию одного моля газа.

Ответ: $74,8$ кДж .

10-11. Газ нагрет до температуры, при которой возбуждены все степени свободы (поступательные, вращательные и колебательные). Найти молярную теплоемкость газа при постоянном объеме и показатель адиабаты, если газ состоит из а) двухатомных молекул, б) линейных N-атомных, в) объемных N-атомных.

Ответ: а) $C_v = 3,5R$, $\gamma = 9/7$; б) $C_v = (3N - 2,5)R$, $\gamma = (6N - 3)/(6N - 5)$; в) $C_v = 3(N - 1)R$, $\gamma = (N - 2/3)/(N - 1)$.

10-12. Идеальный газ, состоящий из N - атомных молекул, расширяется изобарически. Считая, что у молекул возбуждены все степени свободы (поступательные, вращательные и колебательные), найти, какая доля количества тепла, сообщаемого газу, расходуется на работу расширения. Рассмотреть случаи а)объемных и б)линейных молекул.

Ответ: а) $A/Q = 1/(3N - 2)$; б) $A/Q = 1/(3N - 1,5)$.

10-13. Энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объемом 20 л, равна 5 кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул 2 км/с. Найти массу азота в баллоне и его давление.

Ответ: 2,5 г; 0,167 МПа.

10-14. Найти число степеней свободы молекул идеального газа, молярная теплоемкость которого а) $C_p = 29,1$ Дж/(моль · К) при $p = \text{const}$; б) $C = 29,1$ Дж/(моль · К) в процессе $pT = \text{const}$.

Ответ: а) $i = 2(C_p/R - 1) = 5$; б) $i = 2(C/R - 2) = 3$.

10-15. Найти степень диссоциации ϑ молекул кислорода, если его удельная теплоемкость при постоянном давлении известна: $c_p = 1,05$ кДж/(кг · К).

Ответ: $\vartheta = \dfrac{\eta}{2 + \eta} = 0,361$, где $\eta = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{C_{p2} - c_p \mu_2}{c_p \mu_1 - C_{p1}}$ (индекс "1" относится к атомарному, а "2" — к молекулярному кислороду).

Распределение Больцмана

11-1. В длинном вертикальном сосуде находится смесь газов двух сортов с массами молекул m_1 и m_2. Концентрации этих молекул у дна сосуда n_{10} и $n_{20} > n_{10}$. На какой высоте концентрации их будут одинаковы ?

Ответ: $h = kT \dfrac{\ln(n_{20}/n_{10})}{(m_2 - m_1)g}$.

11-2. В диоде электроны образуют газ с температурой $T = 1150$ К, окружающий накалённый катод и находящийся в задерживающем поле анода. Поэтому до анода доходят только самые быстрые электроны, испущенные катодом. Найти долю электронов, преодолевающих задерживающий потенциал $\varphi = 0,4$ В. Катодом является тонкая нить, расположенная по оси цилиндрического анода.

Ответ: $1,76\%$.

11-3. Вблизи поверхности Земли отношение объемных концентраций кислорода O_2 и азота N_2 в воздухе равно $\eta = 0,268$. Полагая температуру атмосферы одинаковой и равной $0\,°C$, найти величину этого отношения на высоте 10 км.

Ответ: $0,225$.

11-4. Найти силу, действующую на частицу со стороны однородного поля, если концентрации этих частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 3$ см (вдоль силовых линий поля), отличаются в 2 раза. Температура системы равна 280 К.

Ответ: $F = \dfrac{kT\ln 2}{\Delta x} = 8,93 \cdot 10^{-20}$ Н.

11-5. В центрифуге производится разделение смеси газов, молекулы которых имеют массы m_1 и m_2. Коэффициентом разделения называют отношение $q = \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)_{r=R} \Big/ \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)_{r=0}$, где R – радиус центрифуги, n – концентрация молекул газа. Вычислить q при заданных скорости вращения центрифуги ω и температуре газа T.

Ответ: $q = \exp\left[\dfrac{(m_1 - m_2)\omega^2 R^2}{2kT}\right]$.

11-6. Закрытая с одного конца труба длины 1 м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью 62,8 рад/с. Давление атмосферы 0,1 МПа, температура 20 °C. Найти давление воздуха у закрытого конца трубы.

Ответ: $p = p_0 \exp\left(\dfrac{\mu\omega^2 l^2}{2RT}\right) = 0,1024$ атм.

11-7. При наблюдении в микроскоп взвешенных частиц гуммигута обнаружено, что средние их числа в слоях, расстояние между которыми 40 мкм, отличаются в 2 раза. Найти число Авогадро, если известно, что радиус частиц равен 0,2 мкм, а их плотность на $\Delta\rho = 200$ кг/м^3 больше плотности окружающей жидкости. Температура среды 290 К.

Ответ: $N_{\text{Ав}} = \dfrac{3RT\ln 2}{4\pi r^3 g\Delta\rho\Delta h} = 6,35 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

11-8. Вертикальная, закрытая с обоих концов, труба высоты 200 м и объема 200 л заполнена кислородом (O_2). Температура газа в трубе одинакова и равна 293 K; давление газа у нижнего основания $p_0 = 0,1$ МПа. Найти давление газа у верхнего края трубы и количество молекул кислорода в трубе.

Ответ: $p = 0,975\,p_0$; $N = \dfrac{p_0 V N_{\text{Ав}}}{\mu g h}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{\mu g h}{RT}\right)\right] = 4,88 \cdot 10^{24}$ молекул.

11-9. Найти среднюю потенциальную энергию молекулы газа в герметическом вертикальном цилиндре высоты H, находящемся в однородном поле тяжести. Температура газа в сосуде всюду одинакова и равна T.

Ответ: $\langle U\rangle = kT\dfrac{1-(1+\alpha H)\exp(-\alpha H)}{1-\exp(-\alpha H)}$, где $\alpha = \dfrac{mg}{kT}$.

11-10. Закрытую с обоих концов горизонтальную трубку длины $l = 1$ м перемещают с постоянным ускорением, направленным вдоль ее оси. Внутри трубки находится аргон при температуре 330 K. При какой величине ускорения концентрации аргона у концов трубки будут различаться на 1% ?

Ответ: $a = -\dfrac{RT\ln 0,99}{\mu l} = 689$ м/с^2.

11-11. Найти среднюю потенциальную энергию молекулы газа в земной атмосфере, считая ее изотермической (с температурой T), а поле силы тяжести однородным.

Ответ: $\langle U\rangle = kT$.

11-12. На какой высоте в экваториальной плоскости плотность изотермической атмосферы Земли минимальна ? Предполагается, что вся атмосфера вращается с такой же угловой скоростью, что и Земля. Согласно [7] на экваторе $g = 9,7805$ м/с^2, а $R_З = 6378,1$ км.

Ответ: $r = R_З\sqrt[3]{g/(\omega^2 R_З)} = 6,62\,R_З$.

11-13. Найти распределение концентрации молекул газа внутри вертикального цилиндра радиуса R и высоты H, вращающегося вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью ω. Масса одной молекулы m, температура газа T, а полное число молекул в цилиндре N.

Ответ: $n(r,z) = n_0\cdot\exp\left(-\dfrac{mgz}{kT} + \dfrac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right)$, где

$$n_0 = \frac{Ng}{2\pi}\left(\frac{m\omega}{kT}\right)^2\left[1-\exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)\right]^{-1}\cdot\left[\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)-1\right]^{-1}.$$

11-14. Ротор центрифуги радиуса 20 см заполнен атомарным хлором при температуре 3000 K. Хлор состоит из двух изотопов Cl^{37} и Cl^{35}, причем доля первого составляет 24,6%. Найти доли обоих изотонов у стенок ротора, если центрифуга вращается с угловой скоростью 10^4 рад/с.

$$\text{Ответ:}\quad \frac{n_1}{n_1+n_2} = 25,5\%\,; \qquad \frac{n_2}{n_1+n_2} = 74,5\%\,.$$

11-15. Газ с температурой T находится в центрально-симметричном силовом поле $U(r) = \alpha r^2$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Концентрация частиц в центре поля равна n_0. Найти а) относительное число всех частиц, находящихся в слое $(r, r+dr)$, б) наиболее вероятное расстояние частиц от центра поля.

$$\text{Ответ: а)}\ \frac{dN}{N} = \left(\frac{\alpha}{\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{kT}\right) 4\pi r^2 dr\,;\ \text{б)}\ r_{\text{в}} = \sqrt{\frac{kT}{\alpha}}\,.$$

11-16. Вычислить величину полного числа молекул в атмосфере Земли, считая, что температура атмосферы постоянна, а её гравитационное поле не меняется с высотой. Радиус Земли принять равным 6370 км.

$$\text{Ответ:}\quad N \approx \frac{4\pi R_{З}^3 p_{\text{атм}} N_{\text{Ав}}}{\mu g} \approx 1,1\cdot 10^{44}\ \text{молекул.}$$

Характеристики движения молекул

12-1. Узкий пучок молекул влетает в сосуд с газом. Найти среднюю длину свободного пробега молекул пучка, если поток молекул в пучке убывает в η раз на расстоянии Δl вдоль пучка.

Ответ: $\lambda = \Delta l/\ln\eta$.

12-2. Как λ зависит от абсолютной температуры, если идеальный газ совершает процесс: а) изохорический, б) изобарический, в) адиабатический ?

Ответ: а) $\lambda \approx \mathrm{const}$, б) $\lambda \sim T$, в) $\lambda \sim T^{1/(1-\gamma)}$.

12-3. Найти среднюю продолжительность среднего свободного пробега молекулы кислорода при давлении 2 мм рт.ст. и температуре 27 °C (эффективный диаметр молекулы кислорода $d = 0,35$ нм).

Ответ: 64,1 нс.

12-4. Найти при нормальных условиях среднюю длину свободного пробега молекулы газа, для которого постоянная Ван-дер-Ваальса $b =$ $= 40$ см^3/моль. Указание: учесть связь поправки b с суммарным объёмом молекул газа.

Ответ: $\lambda \approx 83,5$ нм.

12-5. Идеальный газ совершает политропический процесс с показателем политропы n. Найти зависимость частоты столкновений молекул ν от а) объема, б) давления, в) температуры.

Ответ: а) $\nu \sim V^{-(n+1)/2}$, б) $\nu \sim p^{(n+1)/(2n)}$,
в) $\nu \sim T^{(n+1)/(2n-2)}$.

12-6. Вычислить, какая часть молекул газа: а) пролетает без столкновений расстояние, равное средней длине свободного пробега λ, б) испытывает первое столкновение, пролетев расстояние от λ до 2λ.

Ответ: а) $0,368$; б) $0,233$.

12-7. Идеальный газ совершает политропический процесс с показателем политропы n. Найти зависимости средней длины свободного пробега в этом процессе от а) объема, б) давления, в) температуры.

Ответ: а) $\lambda \sim V$, б) $\lambda \sim p^{-1/n}$, в) $\lambda \sim T^{1/(1-n)}$.

12-8. Как число столкновений молекулы газа с другими молекулами зависит от абсолютной температуры, если газ совершает процесс: а) изохорический, б) изобарический, в) адиабатический ?

Ответ: а) $\nu \sim \sqrt{T}$, б) $\nu \sim 1/\sqrt{T}$, в) $\nu \sim T^{(\gamma+1)/(2\gamma-2)}$.

12-9. Во сколько раз средняя длина свободного пробега молекул азота при нормальных условиях больше среднего расстояния между его молекулами ? Эффективный диаметр молекулы азота равен $0,37$ нм.

Ответ: в 18,3 раза.

12-10. Найти число всех столкновений между молекулами, которые происходят за 1 с в 1 см^3 азота при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы азота равен $0,37$ нм.

Ответ: $Z = 2\pi d^2 \left(\dfrac{p}{kT}\right)^2 \sqrt{\dfrac{RT}{\pi\mu}} = 9,98 \cdot 10^{28}$ см$^{-3}$с$^{-1}$.

12-11. Сосуд содержит 1 моль газа, средняя длина свободного пробега одной молекулы которого равна λ. Для какой длины пробега l вероятность того, что **хотя бы одна любая** молекула пройдет в сосуде без столкновений путь, превышающий l, меньше 50% ?

Ответ: $l = \lambda \ln(2N_{\text{Ав}}) = 55,4\lambda$.

12-12. Определить молярную теплоемкость идеального газа, состоящего из жестких двухатомных молекул, в политропическом процессе, при котором частота столкновений молекул между собой в 1 см^3 газа остается неизменной.

Ответ: $C = 2,75\,R$.

12-13. Газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, расширяется политропически так, что частота ударов молекул о стенки сосуда остаётся неизменной. Найти молярную теплоёмкость газа при этом процессе.

Ответ: $C = 3R$.

12-14. Азот, молекулы которого имеют эффективный диаметр $d = 0,37$ нм, заключен в сферический сосуд радиуса $r = 10$ см. Найти массу азота, если известно, что число ударов его молекул о стенку сосуда за любой промежуток времени равно числу соударений молекул между собой.

$$\textit{Ответ:}\quad m = \frac{\sqrt{2}\mu r^2}{N_{\text{Ав}} d^2} = 4,80 \cdot 10^{-9}\ \text{кг}.$$

12-15. Пусть αdt – вероятность того, что молекула газа испытает столкновение в течение времени dt ($\alpha = \text{const} > 0$). Найти а) вероятность того, что молекула не испытает столкновений в течение времени t; б) среднее время между столкновениями.

Ответ: а) $w = e^{-\alpha t}$, б) $\langle t \rangle = 1/\alpha$.

Процессы переноса

13-1. Какой толщины должна быть деревянная стена здания, чтобы обеспечить такую же теплоизоляцию, что и кирпичная стена толщины $d_1 = 40$ см? Какое количество тепла за сутки теряет 1 м^2 такой стены, если температура внутри помещения $+20\,^\circ$C, а снаружи $-18\,^\circ$C? Теплопроводность кирпича $æ_1 = 0,60$ Вт/(м·К), дерева – $æ_2 = 0,15$ Вт/(м·К).

Ответ: $d_2 = d_1 æ_2/æ_1 = 10$ см; $Q = 4,92$ МДж.

13-2. Антикатод рентгеновской трубки представляет собой медный стержень длины 25 см и диаметра 1,5 см. Холодный конец стержня омывается проточной водой, которая нагревается на $3\,^\circ$C при расходе воды 1 кг/мин. Найти разность температур между горячим и холодным концами стержня, если потерями тепла через боковую поверхность стержня можно пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4,18$ кДж/(кг·К), а теплопроводность меди $æ = 390$ Дж/(м·с·К).

Ответ: $\Delta T = 758$ К.

13-3. Стержень одинакового сечения, заключенный в теплоизолирующую оболочку, состоит из двух частей: одна имеет длину l_1 и теплопроводность $æ_1$, а другая – l_2 и $æ_2$ соответственно. Найти температуру $T_{\text{К}}$ в точке соприкосновения этих частей, если концы стержня поддерживаются при температурах T_1 и T_2.

Ответ: $T_{\text{К}} = (æ_2 l_1 T_2 + æ_1 l_2 T_1) / (æ_1 l_2 + æ_2 l_1)$.

13-4. Найти показатель политропы n процесса, совершаемого идеальным газом, при котором остается постоянным коэффициент а) диффузии, б) вязкости, в) теплопроводности.

Ответ: а) $n = 3$; б) $n = 1$; в) $n = 1$.

13-5. В результате некоторого процесса коэффициент вязкости идеального газа увеличился в 2 раза, а коэффициент диффузии — в 4 раза. Как и во сколько раз изменилось давление газа ?

Ответ: увеличилось в 2 раза.

13-6. Два стержня, длины которых l_1 и l_2 и коэффициенты теплопроводности $æ_1$ и $æ_2$, сложены торцами, и их боковые поверхности теплоизолированы. Найти коэффициент теплопроводности однородного стержня длиной $l_1 + l_2$, проводящего тепло так же, как и два сложенных торцами стержня.

Ответ: $$æ = \frac{l_1 + l_2}{l_1/æ_1 + l_2/æ_2} .$$

13-7. Во сколько раз изменятся коэффициенты диффузии и вязкости при десятикратном адиабатическом сжатии двухатомного идеального газа ?

Ответ: $$\frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{(3-\gamma)/2} = 0,158\,; \quad \frac{\eta_2}{\eta_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{(1-\gamma)/2} = 1,58 .$$

13-8. Два одинаковых параллельных диска радиуса $r = 20$ см , оси которых совпадают, находятся на расстоянии $h = 5$ мм друг от друга. Один из дисков вращается с частотой $\nu = 2$ об/с , другой неподвижен. Диски находятся в воздухе при нормальных условиях. Найти момент сил, действующий на неподвижный диск. Эффективный диаметр молекулы воздуха $d = 0,307$ нм .

Ответ: $M = \pi^2 \nu \eta r^4 / h = 1,08 \cdot 10^{-4}$ Н · м .

13-9. Электрический ток силой $I = 1$ А протекает по проводнику, имеющему длину $l = 1$ м , радиус $r = 1$ мм и сопротивление $R_{\text{пр}} = 10$ Ом . Проводник окружен изоляцией толщины $d = 3$ мм . Найти температуру на поверхности проводника, если известно, что температура внешней поверхности изоляции $t_2 = 28\,°\text{C}$, а теплопроводность изоляции $æ = 0,034$ Вт/(м · К) .

Ответ: $$t_1 = t_2 + \frac{I^2 R_{\text{пр}}}{2\pi æ l} \ln(1 + d/r) = 92,9\,°\text{C} .$$

13-10. Найти распределение температуры между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями с радиусами r_1 и r_2 , находящимися в однородной среде с теплопроводностью $æ$. Температуры поверхностей поддерживаются равными T_1 и T_2 .

Ответ: $$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1)\,\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} .$$

13-11. Найти распределение температуры в пространстве между двумя концентрическими сферами с радиусами r_1 и r_2, заполненном однородным теплопроводящим веществом. Температуры сфер T_1 и T_2 соответственно.

Ответ: $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1)\,\dfrac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2}$.

13-12. Постоянный электрический ток течет по однородному прямому проводнику радиуса r_0, в результате чего в единице объема проводника выделяется тепловая мощность w. Найти распределение температуры в проводнике, зная, что установившаяся температура на его поверхности равна T_0, а коэффициент теплопроводности равен æ.

Ответ: $T(r) = T_0 + \dfrac{w}{4\text{æ}}(r_0^2 - r^2)$.

13-13. В однородном шаре радиуса r_0, сделанном из материала с теплопроводностью æ, выделяется равномерно по объему тепловая мощность с плотностью w. Найти распределение температуры в шаре, если установившаяся температура на его поверхности равна T_0.

Ответ: $T(r) = T_0 + \dfrac{w}{6\text{æ}}(r_0^2 - r^2)$.

13-14. Пробирка, диаметр которой мал по сравнению с её высотой $h = 20$ см, полностью заполнена водой. Верхний открытый конец пробирки обдувается поперечным потоком сухого воздуха так, что давление водяного пара здесь равно нулю. Вблизи поверхности воды водяной пар можно считать насыщенным. Учитывая, что плотность насыщенного водяного пара $\rho_{\text{н}} = 0{,}03$ кг/м^3, а коэффициент диффузии молекул воды в воздухе $D = 3\cdot 10^{-5}$ м^2/с, определить время испарения всей воды из пробирки.

Ответ: $\tau = \rho_{\text{воды}} h^2 \big/ (2\rho_{\text{н}} D) = 257$ суток.

13-15. Эффективный диаметр молекулы воздуха, заполняющего пространство между двумя оконными стёклами, $d = 0{,}307$ нм. Температуры стёкол $t_1 = +15\,^\circ$C и $t_2 = -10\,^\circ$C, а расстояние между ними $l = 10$ см. Сколько тепла будет теряться через окно с площадью $S = 2$ м^2 за один час ?

Ответ: $Q = \dfrac{10kS\tau}{9\pi l d^2}\sqrt{\dfrac{R}{\pi\mu}}\left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2}\right) = 22{,}2$ кДж.

13-16. По сплошному цилиндрическому проводнику радиуса $r_0 = 1$ мм течёт ток $I = 1$ А. Проводник окружён коаксиальной цилиндрической оболочкой радиуса $r = 10$ см, температура которой T поддерживается постоянной и равной 300 К. Пространство между проводником и оболочкой заполнено воздухом. Найти установившуюся температуру T_0 поверхности проводника с током, если известно, что сопротивление единицы длины проводника $R_1 = 1$ кОм/м, а эффективный диаметр молекулы воздуха $d = 0,307$ нм.

Ответ: $T_0 = \left[T^{3/2} + \dfrac{9I^2R_1d^2}{20k}\sqrt{\dfrac{\pi\mu}{R}}\ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right)\right]^{2/3} = 737$ K.

13-17. Найти распределение температуры в веществе, находящемся между двумя параллельными пластинами, поддерживаемыми при температурах T_1 и T_2. Расстояние между пластинами l, а коэффициент теплопроводности вещества растет с ростом температуры по закону $æ \sim \sqrt{T}$.

Ответ: $T(x) = T_1\left\{1 + \left(\dfrac{x}{l}\right)\cdot\left[\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} - 1\right]\right\}^{2/3}$, где

x – расстояние от пластины с температурой T_1.

13-18. Вертикальная трубка длины $l = 10$ см запаяна снизу и наполовину заполнена водой при температуре $T = 300$ K. Относительная влажность окружающего воздуха 50%, пар у поверхности воды можно считать насыщенным, а его давление $p_н = 27$ мм. рт. ст.. Через какой промежуток времени τ вся вода испарится из трубки ? Длина свободного пробега молекул в системе воздух – пар $\lambda = 0,1$ мкм.

Ответ: $\tau = \dfrac{9\rho_{воды}l^2}{8\lambda p_н}\sqrt{\dfrac{\pi RT}{2\mu}} = 42,2$ суток.

13-19. Вязкость газов можно измерять по затуханию крутильных колебаний горизонтального диска, подвешенного на упругой нити над таким же неподвижным диском (рис.4.2). Считая известными радиус диска R, его массу m, расстояние между дисками b и коэффициент затухания β, найти вязкость газа η по этим данным.

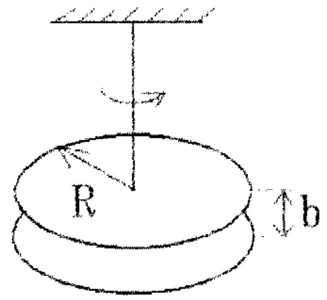

Рис.4.2

Ответ: $\eta = 2\beta mb/(\pi R^2)$.

13-20. Два небольших тела с одинаковыми теплоемкостями $C = 500$ Дж/К соединены стержнем длины $l = 40$ см с площадью поперечного сечения $S = 3$ см^2. Коэффициент теплопроводности стержня не зависит от температуры и равен $æ = 20$ Вт/(м · K). В начальный момент температуры тел отличаются друг от друга. Предполагая, что система теплоизолирована, найти время, в течение которого разность температур уменьшится вдвое (теплоемкостью стержня пренебречь).

Ответ: $\tau = \dfrac{lC}{2æS}\ln 2 = 193$ мин.

13-21. Два тонкостенных коаксиальных цилиндра с радиусами $r_1 = 4,8$ см и $r_2 = 5$ см и с одинаковой длиной $l = 10$ см, находящиеся в воздухе при нормальных условиях, могут вращаться без трения вокруг общей оси. Внешний цилиндр сначала заторможен, а внутренний вращается с постоянной частотой $\nu_1 = 20$ об/с. Через какой промежуток времени после освобождения внешнего цилиндра он приобретет частоту вращения $\nu_2 = 1$ об/с ? Масса внешнего цилиндра $m = 100$ г; газокинетический диаметр молекул воздуха $d = 0,307$ нм.

$$\textit{Ответ:} \quad \tau \approx -\frac{m(r_2 - r_1)}{2\pi l \eta r_2} \ln\left(1 - \frac{\nu_2 r_2}{\nu_1 r_1}\right) = 19,9 \text{ с},$$

$$\text{где } \eta = \frac{2}{3\pi d^2 N_{\text{Ав}}}\sqrt{\frac{RT\mu}{\pi}}.$$

13-22. По бесконечно длинному прямому проводнику радиуса $r_0 = 0,05$ мм с сопротивлением единицы длины $R_1 = 800$ Ом/м течёт ток $I = 0,3$ А. Первоначально проводник находился в воздушной атмосфере при нормальных условиях. Средняя длина свободного пробега молекулы воздуха при нормальных условиях $\lambda_0 = 8,88 \cdot 10^{-8}$ м. При протекании тока поверхность проводника нагревается до установившейся температуры $T_0 = 1600$ К. На каком расстоянии от оси проводника температура воздуха в четыре раза меньше, чем у его поверхности ?

$$\textit{Ответ:} \quad r = r_0 \exp\left(\frac{35}{3}\sqrt{\frac{\pi R}{2\mu}}\frac{p_{\text{атм}}\lambda_0}{T_{\text{атм}} I^2 R_1} T_0^{3/2}\right) \approx 7,05 \text{ см}.$$

13-23. Два одинаковых сосуда с объёмом $V = 1$ л каждый соединены трубкой длины $l = 20$ см с малой площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2. В начальный момент трубка закрыта, давления газа в обоих сосудах одинаковы, а их температуры равны комнатной. Но первый сосуд заполнен смесью газов "А" и "В", а во втором сосуде находится только газ "А". Какая часть η газа "В" перейдёт во второй сосуд спустя $t = 1$ час после открытия трубки ? Коэффициенты диффузии газа "А" в газе "В" и газа "В" в газе "А" одинаковы и имеют величину $D = 5 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.

$$\textit{Ответ:} \quad \eta = 1 - \exp\left(-\frac{2DS}{lV}\tau\right) \approx 1,78\%.$$

Тематика задач

(Число, стоящее в скобках около номера задачи, обозначает примерный уровень сложности по восьмибалльной шкале)

Распределение Максвелла

8-1 - МР,СК	(1)	8-13 - НМ	(1)	8-25 - МР	(3)
8-2 - СК,ПН	(1)	8-14 - МР	(2)	8-26 - МР	(3)
8-3 - СК,АД	(1)	8-15 - МР	(2)	8-27 - МР	(3)
8-4 - МР,СК	(1)	8-16 - МР	(2)	8-28 - МР	(3)
8-5 - МР	(1)	8-17 - МР	(2)	8-29 - МР	(3)
8-6 - МР	(1)	8-18 - МР	(2)	8-30 - МР	(4)
8-7 - СК	(1)	8-19 - НМ,БИ	(2)	8-31 - НМ	(5)
8-8 - МР	(1)	8-20 - МР	(3)	8-32 - МР	(5)
8-9 - МР	(1)	8-21 - МР	(3)	8-33 - МР	(6)
8-10 - СК	(1)	8-22 - МР	(3)	8-34 - МР	(6)
8-11 - СК,ПН	(1)	8-23 - МР	(3)	8-35 - МР	(8)
8-12 - МР	(1)	8-24 - НМ	(3)		

Плотность потока молекул. Эффузия

9-1 - ПМ	(1)	9-7 - ПМ	(3)	9-13 - ПМ,МР	(6)
9-2 - ПМ	(1)	9-8 - ЭФ	(3)	9-14 - ПМ,МР	(6)
9-3 - ПМ	(1)	9-9 - ЭФ	(4)	9-15 - ПМ,МР	(7)
9-4 - ПМ,АД	(2)	9-10 - ЭФ	(4)	9-16 - ПМ,МР	(7)
9-5 - ЭФ	(3)	9-11 - ЭФ,УС	(4)	9-17 - ПМ,МР	(8)
9-6 - ЭФ	(3)	9-12 - ПМ,МР	(5)		

Степени свободы молекул

10-1 - СТ,СЗ	(1)	10-6 - СТ,ТП	(2)	10-11 - СТ	(2)
10-2 - СК,СЗ	(1)	10-7 - СТ	(2)	10-12 - СТ,ПН	(2)
10-3 - СЭ,УС	(1)	10-8 - СЭ,АД	(2)	10-13 - СК,СЭ	(2)
10-4 - СЗ	(1)	10-9 - СЭ,СТ	(2)	10-14 - СТ,ТП	(3)
10-5 - СТ,ТП	(1)	10-10 - СЭ,СТ	(2)	10-15 - СД	(4)

Распределение Больцмана

11-1 - БР,АТ	(1)	11-7 - БР,ЧА	(3)	11-13 - БР,АТ	(4)
11-2 - БР	(1)	11-8 - БР,АТ	(3)	11-14 - БР	(4)
11-3 - БР,АТ	(1)	11-9 - БР,АТ	(3)	11-15 - БР	(4)
11-4 - БР	(2)	11-10 - БР	(3)	11-16 - БР,АТ	(5)
11-5 - БР	(3)	11-11 - БР,АТ	(4)		
11-6 - БР	(3)	11-12 - БР,АТ	(4)		

Характеристики движения молекул

12-1 - РП	(1)	12-6 - ВС	(2)	12-11 - ВС	(3)
12-2 - СП,АД	(1)	12-7 - СП,ПП	(2)	12-12 - ЧС,ТП	(3)
12-3 - СП	(1)	12-8 - ЧС,АД	(2)	12-13 - ПМ,ТП	(3)
12-4 - СП,ПВ	(2)	12-9 - СП	(2)	12-14 - ЧС,ПМ	(4)
12-5 - ЧС,ПП	(2)	12-10 - ЧС	(3)	12-15 - ВС	(5)

Процессы переноса

13-1 - ТЛ	(1)	13-9 - ТЛ	(4)	13-17 - ТЛ	(5)
13-2 - ТЛ	(2)	13-10 - ТЛ	(4)	13-18 - ДФ,ЧС,КП	(5)
13-3 - ТЛ	(2)	13-11 - ТЛ	(4)	13-19 - ВЗ	(5)
13-4 - КП,ПП	(2)	13-12 - ТЛ	(4)	13-20 - ТЛ	(5)
13-5 - КП	(2)	13-13 - ТЛ	(4)	13-21 - ВЗ	(5)
13-6 - ТЛ	(3)	13-14 - ДФ,УС	(4)	13-22 - ТЛ,КП	(5)
13-7 - КП,АД	(3)	13-15 - ТЛ,КП	(5)	13-23 - ДФ	(6)
13-8 - ВЗ,КП	(4)	13-16 - ТЛ,КП	(5)		

Пояснения к аббревиатуре

АД – адиабатический процесс,
АТ – атмосферы планет,
БИ – биномиальное распределение,
БР – распределение Больцмана,
ВЗ – вязкость,
ВС – вероятность столкновения,
ДФ – диффузия,
КП – коэффициенты переноса,
МР – распределение Максвелла,
НМ – немаксвелловское распределение,
ПВ – постоянные Ван-дер-Ваальса,
ПМ – поток молекул,
ПН – первое начало термодинамики,
ПП – политропические процессы,
ПТ – поток тепла,
РП – рассеяние пучка молекул,
СД – степень диссоциации,
СЗ – скорость звука,
СК – средние скорости,
СП – средняя длина свободного пробега,
СТ – степени свободы,
СЭ – средняя энергия,
ТЛ – теплопроводность,
УС – уравнение состояния идеального газа,
ЧА – число Авогадро (метод определения по Перрену),
ЧС – частота столкновений,
ЭФ – эффузия.

Литература

1. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. - М.: ИЛ, 1955.- 480 с.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.- 4-е изд. - М.: Наука, 1988.- 736 с.

3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.- 12-е изд.- М.: Наука, 1990.- 397 с.

4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.: Наука, 1964.- 228 с.

5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, 1964.- 344 с.

6. Савельев И.В. Курс физики.Т.1: Механика. Молекулярная физика. - М.: Наука, 1989.- 352 с.

7. Кэй Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных.- 2-е изд.- М.: ФМ, 1962.- 247 с.

8. Иродов И.Е. Основные законы механики.- 3-е изд. - М.: Высшая школа, 1985.- 248 с.

9. Jeans J.H. The Dinamical Theory of Gases.- 3-d ed. - Cambridge University Press, 1921.- 442 p.

10. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями.- М.: Мир, 1969. - 624 с.

11. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике.- 2-е изд.- М.: Наука, 1988.- 288 с.

12. Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике.- 2-е изд.- М.: Наука, 1978.- 192 с.

13. Кубо Р. Термодинамика.- М.: Мир, 1970.- 304 с.

14. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика.- 2-е изд.- М.: Наука, 1979.- 552 с.

15. Матвеев А.Н. Молекулярная физика.-2-е изд.- М.: Высшая школа, 1987.- 360 с.

16. Сборник задач по общему курсу физики /Под ред. А.Н.Куценко и Ю.В.Рублева.- 2-е изд.- М.: Высшая школа, 1972.- 432 с.

17. Сборник задач по общему курсу физики. ч.II /В.Л.Гинзбург и др.- М.: ФМ, 1960.- 366 с.

18. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика /Под ред. Д.В.Сивухина.- М.: Наука, 1976.-208 с.

19. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- 2-е изд.- М.: Наука, 1988.- 416 с.

20. Сахаров Д.И. Сборник задач по физике.-10-е изд.- М.: Учпедгиз, 1963.- 288 с.

21. Сена Л.А. Сборник вопросов и задач по физике.- М.: Высшая школа, 1986. - 240 с.

22. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968.- 720 с.

Колмаков Юрий Николаевич

Пекар Юрий Александрович

Пекар Максим Юрьевич

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Задачи и методы их решения

Редактор И.А.Есаян
Свод.тем.пл.№60

Подписано в печать Формат бумаги 60 × 841/16. Бумага типограф.№2. Офсетная печать. Усл.печ.л. 8,1. Усл. кр.-отт. 8,1. Уч.-изд.л. 7,0. Тираж экз. Заказ . С 19.

Тульский государственный университет. 300600, Тула, просп. Ленина, 92.

Подразделение оперативной полиграфии Тульского государственного университета. 300600 Тула, ул.Болдина, 151.